Интервальная арифметика: эмпирико-статистический подход к оценке результатов действий

проректор по информатизации, зав. кафедрой прикладной математики и моделирования систем, д.т.н., профессор
Никульчев Е.В.

зам. зав.кафедрой прикладной математики и моделирования систем, к.ф.-м.н., доцент
Петрушин В.Н.

1. Цель доклада

Показать возможность совмещения преимуществ интервального анализа и статистических оценок при обработке экспериментальных данных при независимости от вида распределения случайной величины.

2. Сравнение подходов

Если ставится условие получить решение какой-либо расчетной задачи на базе экспериментальных данных с вероятностью $P = 1$ целесообразно применять интервальный анализ. При применении интервальной арифметики и алгебры происходит значительное расширение интервалов, и такие расчеты не пригодны для конструкторов и технологов; вторым существенным недостатком является отсутствие знания точных границ вариации случайной величины

В теории эксперимента отказываются от достоверности расчетов с вероятностью $P = 1$, исследователь самостоятельно определяет необходимую надежность результата. Такой подход требует знания функции плотности вероятности случайной величины или ее закона распределения. Гипотеза о виде распределения связана с расчетами параметров распределений по выборочным данным методом моментов или методом наибольшего правдоподобия, и несет за собой все погрешности этих расчетов. Традиционно для интервального анализа и теории эксперимента центром оценки выбирается медиана .

3. Поиск минимально возможного интервала оценки значений случайной величины с заданной надежностью

Предположим, что имеется ограниченная непрерывная случайная величина X с плотностью распределения вероятностей $f(x)$ или дискретная величина с законом распределения $P\ (X)$, которая аппроксимируется функцией плотности вероятностей $f(x)$. Задача состоит в поиске наиболее вероятных значений случайной величины с выбранной надежностью результата γ.

Рассмотрим сначала унимодальный случай, пусть все возможные значения $x \in [a, b]$. Найдем наиболее узкий интервал решений $(x_1, x_2) \subset [a, b]$, соответствующий выбранной надежности γ.

3. Поиск минимально возможного интервала оценки значений случайной величины с заданной надежностью (продолжение)

Найдем наиболее узкий интервал решений или объединение интервалов, соответствующий выбранной надежности γ.

При унимодальном, монотонном и многомодальном поведении плотности вероятности получаем задачу условного минимума $y = x_2 - x_1$

при условии $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \gamma$.

При U-образном поведении – задача минимума сводится к задаче условного максимума.

3. Поиск минимально возможного интервала оценки значений случайной величины с заданной надежностью (продолжение)

Решая задачу, получаем для унимодального, многомодального и U-образного поведения получаем

$$\begin{cases} f(x_1) = f(x_2), \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \gamma. \end{cases}$$

При монотонном поведении одной из границ является a или b, а вторая рассчитывается из условия $\int_a^{x_1} f(x)dx = \gamma$ или $\int_x^b f(x)dx = \gamma$

3. Поиск минимально возможного интервала оценки значений случайной величины с заданной надежностью (продолжение)

Чаще всего $f(x)$ неизвестна. Традиционно ищут аппроксимирующую функцию и далее следует аналитический или численный поиск решения. Этого можно избежать, анализируя репрезентативную выборочную совокупность.

Необходимо удалить из ранжированного вариационного ряда наименее вероятные по показателям частоты k вариант.

Значение k определяется соотношением

$$1-\gamma=\frac{k}{n},$$

$$k=n(1-\gamma),$$

где n — объем выборки; $k\in\mathbf{N}$.

4. Построение гистограммы на основании выборки

На предлагаемый способ получения вероятностных интервальных решений существенное влияние может оказать способ группировки наблюдаемых значений. Число возможных полусегментов k при построении гистограммы может варьироваться в пределах, определяемых неравенствами:

$$\begin{cases} 1+\log_2 n < k < \dfrac{n}{1+\left(t(\gamma;n_j)\right)^2}, \\ n_j > 1+\left(t(\gamma;n_j)\right)^2, \end{cases}$$

где n — объем выборки, γ — надежность оценки средней групповой в каждом полусегменте; n_j — число значений случайной величины в j-м полусегменте; $t(\gamma;n_j)$ — значение критерия Стьюдента.

5. Интервальная оценка числовых характеристик по экспериментальным данным

В случае вероятностной интервальной оценки математического ожидания ее тоже можно сделать на основе экспериментальных данных, не прибегая при этом к традиционно применяемому распределению Стьюдента, влекущему за собой значительные погрешности. В процессе усреднения наблюдаемых значений происходит сглаживание распределения с ростом объемов усредняемых значений. Процесс усреднения аналогичен повторной выборке.

5. Интервальная оценка числовых характеристик по экспериментальным данным (продолжение)

Пусть имеется некоторая выборочная совокупность объема *n*, представим ее в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Среднее значение

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{k} x_i n_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_i \text{, где } \sum_{i=1}^{k} n_i = n .$$

5. Интервальная оценка числовых характеристик по экспериментальным данным (продолжение)

Наша задача состоит в поиске интервала, дающего оценку средней с надежности γ. Пусть $\bar{X}_m$ — результат усреднения по *m* вариантам ранжированного вариационного ряда, причем $m<n$; $\bar{X}_r$ — наблюдаемая средняя по *r* измерениям, $r<n$. Каждая из этих величин имеет наибольшее и наименьшее значение для любой конкретной выборки. Для данной задачи важны $\min \bar{X}_m = \sum_{i=1}^{m} x_i n_i \Big/ \sum_{i=1}^{m} n_i$ и $\max \bar{X}_r = \sum_{i=r}^{k} x_i n_i \Big/ \sum_{i=r}^{k} n_i$, несложно доказать, что $\min \bar{X}_m < \bar{X} < \max \bar{X}_r$. Найдем вероятность этого неравенства, используя эмпирическое распределение:

$$P\left(\min \bar{X}_m < \bar{X} < \max \bar{X}_r\right) = 1 - P\left(\bar{X} \le \min \bar{X}_m\right) - P\left(\bar{X} \ge \max \bar{X}_r\right) = 1 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i\right)^n - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=r}^{k} n_i\right)^n.$$

Вероятность этого неравенства равна надежности оценки γ, получаем уравнение:

$$1 - \frac{1}{n^n}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right)^n - \frac{1}{n^n}\left(\sum_{i=r}^{k} n_i\right)^n = \gamma.$$

Из всех возможных решений выбираем то, которое даёт максимальный размах интервальной оценки.

5. Интервальная оценка числовых характеристик по экспериментальным данным (продолжение)

Поиск решения можно осуществить с помощью переборного алгоритма. Выбор в пользу наращивания m или r осуществляется по наименьшему показателю суммы частот. Следовательно, при $m = r = n / 2$, получаем эмпирическое $\gamma = 1 - 2^{-(n-1)}$. Полученное значение γ даже при небольших выборках очень велико, и будет давать достаточно широкие диапазоны оценок, но достоинство их состоит в их высокой надежности. Таким образом, и для вероятностной оценки математического ожидания можно обойтись без аппроксимации и связанных с этим ошибок. Эмпирический подход позволяет оценить вероятность попадания случайной величины в интересующий исследователя интервал или интервалы.

Дисперсия средней $D(\overline{x})$ будет подчиняться неравенству

$$0 \le D(\overline{x}) \le \frac{R^2}{4n},$$

R — размах выборки.

6. Объем повторной выборки

Эмпирический подход даёт возможность оценить объём повторной выборки, необходимый для фиксированной интервальной оценки среднего значения случайной величины

$$1-\frac{1}{n^l}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right)^l-\frac{1}{n^l}\left(\sum_{i=r}^{k} n_i\right)^l=\gamma,$$

где $\sum_{i=1}^{m} n_i$ — сумма частот для всех $x<\bar{x}-\Delta/2$, $\sum_{i=r}^{k} n_i$ — сумма частот для всех $x>\bar{x}+\Delta/2$.

Логарифмируя, находим l

$$l=\frac{\ln\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i\right)}.$$

Пример

Проиллюстрируем полученные результаты на примере двух выборок, приведенных в таблицах 1, 2.

Таблица 1.

x_i	n_i
2	1
3	5
4	10
5	8
6	6
7	4
8	2
9	1
10	1

Таблица 2.

y_j	k_j
3	1
4	3
5	10
6	8
7	7
8	5
9	4
10	3
11	2
12	1

Пример

Критерий χ^2 с высокой надёжностью не отвергает гипотезу о нормальном распределении случайных величин *X* и *Y*. Но для величины *x* вероятность попадания в сегмент [2;10], исходя из предположения нормального распределения, равна 0,7234, для величины *y* – 0,689, тогда как этот интервал достоверен.

С вероятностью 0,99999 исходя из гипотезы нормального распределения средние принадлежат интервалам $\bar{x} \in (4,018; 6,306)$, $\bar{y} \in (5,638; 7,090)$. На основании эмпирической оценки $\bar{x} \in (5,079; 6,526)$ с вероятностью 0,999999999993; $\bar{y} \in (5,136; 8,588)$ с вероятностью 0,9999999999999. Если поставить задачу оценки интервалов исходя из нормального распределения с эмпирическими вероятностями, то они перекроют весь диапазон значений случайных величин.

В случае не столь высоких требований по вероятности, например $\gamma = 0,99$, оценка по нормальному распределению дает интервалы $(4,446; 5,870)$, $(5,816; 7,912)$, оценка по эмпирическому распределению, соответственно, с той же надежностью (4,667;5,515) и (6,101;7,576). Исходя из нормального распределения, средние значения наблюдаемых выборочных совокупностей при выбранной вероятности 0,99 не различаются, тогда как эмпирический подход говорит об обратном.

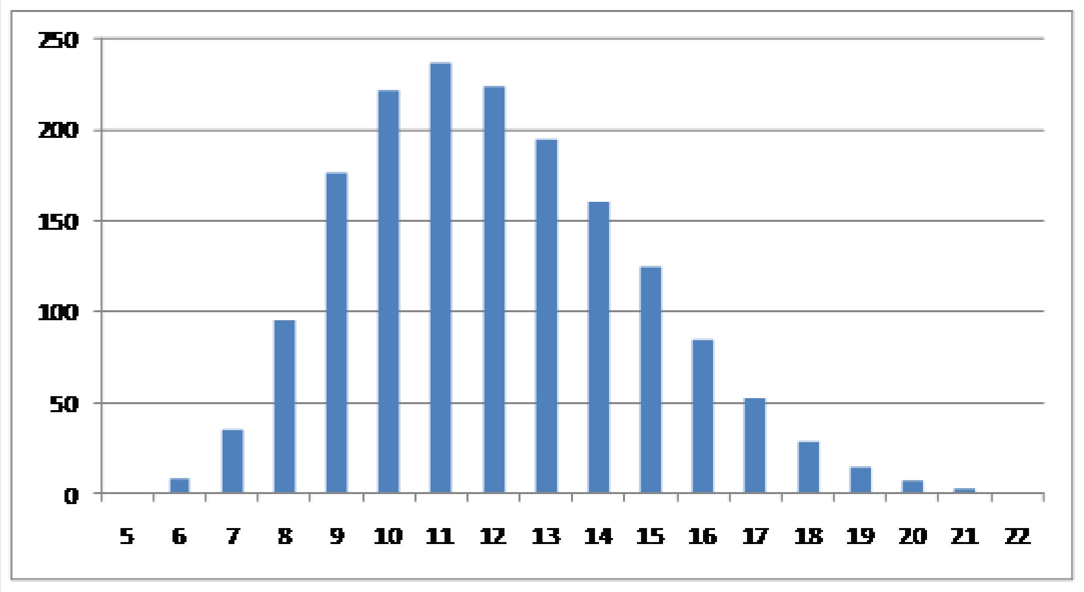
Пример

согласно аксиоматике классической интервальной арифметики:

$x+y\in[5,22]$, $x-y\in[-10,7]$, $x\cdot y\in[6,120]$, $y/x\in[0.3,6]$.

Сумма

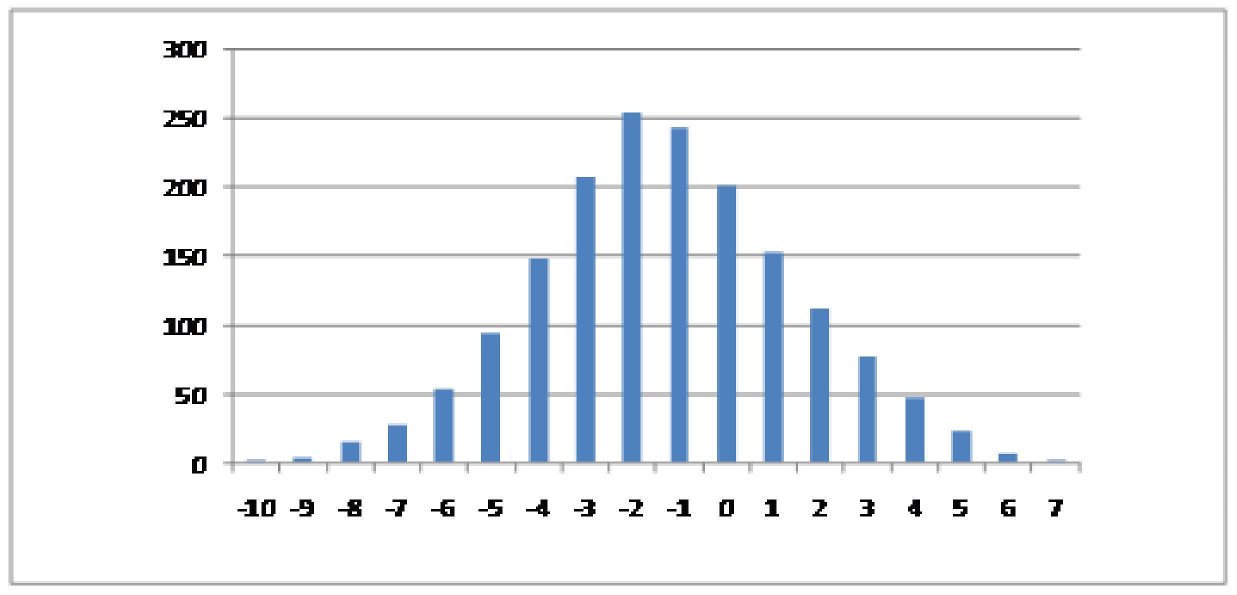
значение	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
частота	1	8	35	96	177	222	237	224	195	160	125	85	52	29	15	7	3	1



Пример

Разность

значение	–10	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
частота	1	4	15	28	53	94	149	208	255	244	201	153	112	77	47	23	7	1

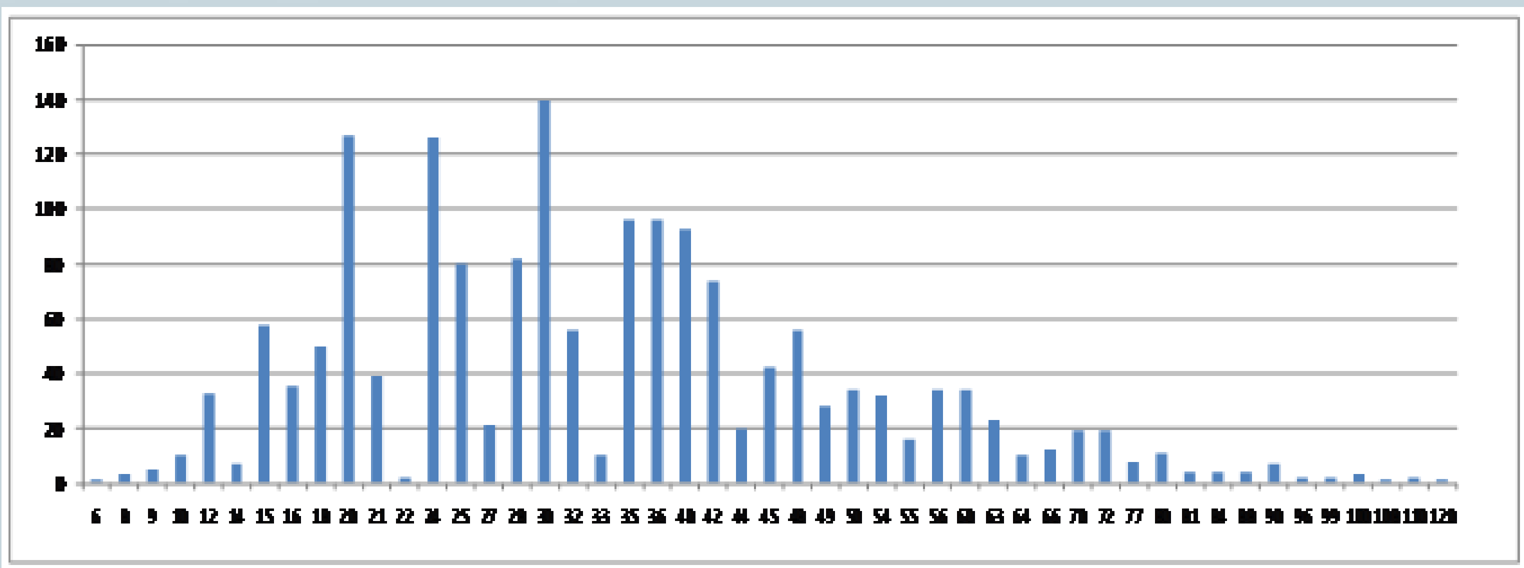


Пример

Произведение

значение	6	8	9	10	12	14	15	16	18	20	21	22	24	25	27	28	30	32
частота	1	3	5	10	33	7	58	35	50	127	39	2	126	80	21	82	140	56

значение	33	35	36	40	42	44	45	48	49	50	54	55	56	60	63	64	66	70
частота	10	96	96	93	74	20	42	56	28	34	32	16	34	34	23	10	12	19



Пример

Частное

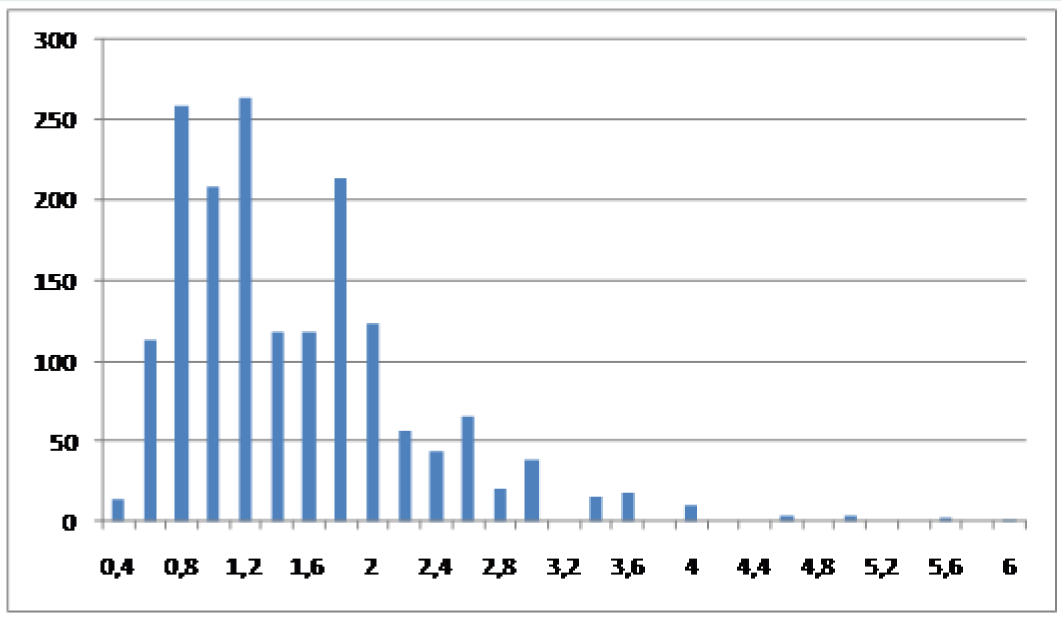
значение	0,3	0,333	0,375	0,4	0,429	0,444	0,5	0,556	0,571	0,6	0,625	0,667
частота	1	1	2	3	4	3	22	10	12	16	20	26

значение	0,7	0,714	0,75	0,778	0,8	0,833	0,857	0,875	0,889	0,9	1	1,1
частота	7	40	26	7	29	60	32	55	5	4	208	2

значение	1,111	1,125	1,143	1,167	1,2	1,222	1,25	1,286	1,333	1,375	1,4	1,429
частота	3	8	20	42	65	2	106	16	46	4	56	12

значение	1,5	1,571	1,6	1,667	1,714	1,75	1,8	1,833	2	2,2	2,25	2,333
частота	107	8	40	68	4	70	32	12	123	16	40	35

значение	2,4	2,5	2,667	2,75	3	3,333	3,5	3,667	4	4,5	5	5,5	6
частота	8	40	25	20	38	15	7	10	10	4	3	2	1



Пример

Критерий Пирсона не отвергает гипотезу о нормальном распределении результатов арифметических действий.

Сравнительная таблица интервальных оценок арифметических действий с надёжностью $\gamma = 0{,}99$.

Нормальное распределение	Эмпирическое распределение
$x+y \in (2.9421; 21.0999)$	$x+y \in [7;\ 19]$
$\overline{x+y} \in (11{,}8; 12{,}244)$	$\overline{x+y} \in (11{,}983;\ 12{,}04)$
$x-y \in (-10.372;\ 7.7843)$	$x-y \in [-8;\ 5]$
$\overline{x-y} \in (-1{,}516;\ -1{,}072)$	$\overline{x-y} \in (-1{,}317;\ -1{,}271)$
$xy \in (-19.7674;\ 90.5714)$	$xy \in [9;21] \cup [24;90]$
$\overline{xy} \in (34{,}053;\ 36{,}751)$	$\overline{xy} \in (35{,}179;\ 35{,}484)$
$y/x \in (-3{,}268; 5{,}3120)$	$y/x \in (0{,}42; 0{,}43) \cup [0{,}5; 1] \cup [1{,}125{,}12] \cup [1{,}25; 4{,}5]$
$\overline{\left(\frac{y}{x}\right)} \in (1{,}439;\ 1{,}557)$	$\overline{\left(\frac{y}{x}\right)} \in (1{,}487;\ 1{,}502)$

Приведенные примеры оценок величин, их средних, результатов арифметических действий свидетельствуют о том, что эмпирический подход позволяет делать более точные вероятностные интервальные оценки для любого наблюдаемого распределения без его аналитической аппроксимации и связанных с ней погрешностями. Удалось совместить независимость классического интервального анализа от вида распределения случайной величины внутри сегмента значения и возможность выбора наиболее вероятных значений без оценки границ генеральной совокупности.