Федоткин Михаил Андреевич

**Нижегородский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Национальный исследовательский университет,
ф-т ВМК, кафедра ПТВ, fma5@rambler.ru**

УПРАВЛЯЮЩИЕ КИБЕРНЕТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ЛЯПУНОВА– ЯБЛОНСКОГО И РЕШЕНИЕ ПАРАДОКСА НЕЗАВИСИМОСТИ

Нижний Новгород — 2011

11.08.2011

Содержание доклада

- I. **Ляпунов Алексей Андреевич (1911 – 1973)**
- II. **Классические методы построения моделей эволюционных систем**
- III. **Кибернетический подход при построении моделей случайных экспериментов с управлением**
- IV. **Решение задачи Мостеллера с позиции классической модели «чёрного ящика»**
- V. **Парадокс Мостеллера–Секея и управляющие кибернетические системы Ляпунова –Яблонского**

В 2011 году исполняется 100 лет, как появился на Божий Свет выдающийся математик и один из основоположников кибернетики в России — Алексей Андреевич Ляпунов (1911 – 1973). Откуда взялось название этой фамилии? Я впервые услышал красивую и необычную легенду – версию от дальних моих родственников по материнской линии из деревни Ляпуновка о происхождении фамилии Ляпунов. Летом мятежные и разноцветные бабочки-мотельки в позднее вечернее и ночное время летели на мерцающий свет от плетеного горящего фитиля и лепили стекла окон деревенских изб. Поэтому часто одному из жителей этой деревни, который обладал невероятно пылким и деятельным характером, давали дополнительное имя Ляпун-мотылёк. Деревня Ляпуновка расположена на севере западе Куркинского района Тульской области. Такое название этой деревни было дано в честь её владельцев – потомков братьев Александра, Григория, Прокопия, Захария и Степана Ляпуновых. Ляпуновы – сподвижники Минина и Пожарского были героями времён изгнания в 1611 – 1612 поляков с русской земли. С этой интересной информацией можно познакомиться в архиве краеведческого Куркинского музея и в книге [6].

Впервые я познакомился с А.А. Ляпуновым в 1969 году на первой конференции по проблемам теоретической кибернетики в Академгородке Новосибирска после защиты кандидатской диссертации по специальности «Теоретическая кибернетика». Я ему рассказал это происхождение названий фамилии Ляпунов и деревни Ляпуновка. А.А. Ляпунов утвердительно ответил, что Иван Борисович Ляпун (помещик в Нижегородском уезде в середине пятнадцатого века) является прямым его предком. Второй раз я встретился с А.А. Ляпуновым на Всесоюзной конференции «Методы Монте-Карло и их применения», которая состоялась в Новосибирске в 1971 году. На этой конференции я делал доклад «Изучение методом Монте-Карло нелинейного процесса обслуживания с целью оптимизации управления конфликтными потоками». Более тесное моё сотрудничество с А.А. Ляпуновым стало возможным и предметным после изучения по совету С.В. Яблонского их совместной публикации по управляющим кибернетическим системам [3].

С 1969 года, используя доступные архивные краеведческие источники Рязанской, Липецкой и Тульской области, я постоянно интересовался историей предков Ляпунова. Наиболее полная информация о жизни, научной, педагогической и общественной деятельности выдающегося русского учёного А.А. Ляпунова приведена в замечательной книге [7]. Поэтому ниже приводятся мои многолетние изыскания по истории замечательных предков А.А. Ляпунова. На рис. 1 приведена схема – ветка рода Ляпуновых, из которой следует, что А.А. Ляпунова является потомком Рюрика в тридцать восьмом колене.

Куркинский Район

Деревня Ляпуновка Куркинского района

Родословная Алексея Андреевича Ляпунова (08. 10.1911 – 23. 06.1973)

Первое колено от Рюрика
Рюрик – Рорик – Рерик (839?–879), первый русский князь в Новгороде с 862 по 879 г.

Второе колено от Рюрика
Игорь Рюрикович (876?–945), киевский князь с 912 по 945 г.

Третье колено от Рюрика
Святослав Игоревич (927?–972), великий князь киевский с 945 по 972 г.

Четвертое колено от Рюрика
Владимир Святославич, Красное Солнышко (948?–1015), великий киевский князь с 980 по 1015 г., в крещении Василий (987), Святой и Равноапостольный

Пятое колено от Рюрика
Ярослав I Владимирович Мудрый (978–1054), великий киевский князь с 1019 по 1054 г.

Шестое колено от Рюрика
Всеволод Ярославич (1030–1093), в крещении Андрей, князь всея Руси, знал пять языков, женат на дочери византийского императора Константина IX Мономаха

Седьмое колено от Рюрика
Владимир Всеволодович Мономах (1053–1125), великий князь киевский с 1113 по 1125 г.

Восьмое колено от Рюрика
Юрий Долгорукий (1090–1157), князь суздальский и великий князь киевский с 1125 по 1157 г.

Девятое колено от Рюрика
Всеволод Юрьевич Большое Гнездо (1154–1212), в крещении Дмитрий, великий князь владимирский с 1176 г.

Десятое колено от Рюрика
Ярослав Всеволодович (1191–1246), великий князь владимирский с 1238 г., 3-й сын Всеволода Большое Гнездо

Одиннадцатое колено от Рюрика
Константин Ярославич Галицкий (1227?–1255), первый удельный галицкий князь (Галич-Мерское), младший брата Александра Ярославича Невского (1220–1263)

Двенадцатое колено от Рюрика
Давыд Константинович Галицкий (1248?–280), галицкий князь и дмитровский князь с 1255 по 1280 г.

Тринадцатое колено от Рюрика
Федор Давыдович Галицкий (1270?–1335?), галицкий князь

Четырнадцатое колено от Рюрика
Иван Федорович Галицкий (1305?–1354), галицкий и дмитровский князь с 1335 по 1354 г.

Пятнадцатое колено от Рюрика
Князь Дмитрий Иванович Галицкий (1325?–1375?), в 1363 г. изгнанный Дмитрием Донским из своего удела, уехал в Нижний Новгород, поступил на службу к местному архиепископу

Шестнадцатое колено
Василий Дмитриевич (1355?–?), потерял княжеский титул

Семнадцатое колено
Василий Васильевич (1380?–?)

Восемнадцатое колено
Борис Васильевич (1405?–?), в 1440 боярин Дмитрия Шемяки (1420–1453)

Девятнадцатое колено
Семен Борисович Осина (1425?–?), родоначальник Осининых, Ильиных и Ляпуновых

Двадцатое колено
Борис Семенович Третьяк Осинин (1445?–?), получил поместье в Дмитровком погосте Бежецкой пятины. Территория расположена между рекой Мста и притоками Волги

Двадцать первое колено
Иван Борисович Ляпун (1465?–?), боярин архиепископа Пимена, в 1526 г. посол к германскому императору, в 1538 г. голова в полках в Коломне. Помещик в Новгороде и в Нижегородском уезде

Двадцать второе колено
Василий Иванович Ляпунов (1485?–?), воевода в Алысте (1563 г.)

Двадцать третье колено
Василий Васильевич Ляпунов (1505?–?)

Двадцать четвёртое колено
Григорий Васильевич Ляпунов (1525?–?)

Двадцать пятое **колено**
Степан Григорьевич Ляпунов (1545?–?)

Двадцать шестое колено
Юрий Степанович Ляпунов (1565?–?)

Двадцать седьмое колено
Алексей Юрьевич Ляпунов (1585?–?), переведен Иваном IV Грозным из Нижнего Новгорода в Кострому

Двадцать восьмое колено
Иван Алексеевич Ляпунов (1615? – ?), в 1639 г. дворянин, с 1640 по 1651 г. воевода, с 1654 по 1655 г. сотенный голова. Имел вотчину в селе Покровское Кинешемского уезда

Двадцать девятое колено
Тихон Иванович Ляпунов (1635?–), помещик

Тридцатое колено
Матвей Тихонович Ляпунов (1655?–?)

Тридцать первое колено
Федор Матвеевич Ляпунов (1675?–?)

Тридцать второе колено
Иван Федорович Ляпунов (1695?–?), гв. капрал (1758 г.)

Тридцать третье колено
Степан Иванович Ляпунов (1715–?)

Тридцать четвёртое колено
Иван Степанович Ляпунов (1736–?),
имел 34 души в селе Байкалка Сызранского уезда

Тридцать пятое колено
Александр Иванович Ляпунов (1757?–?)

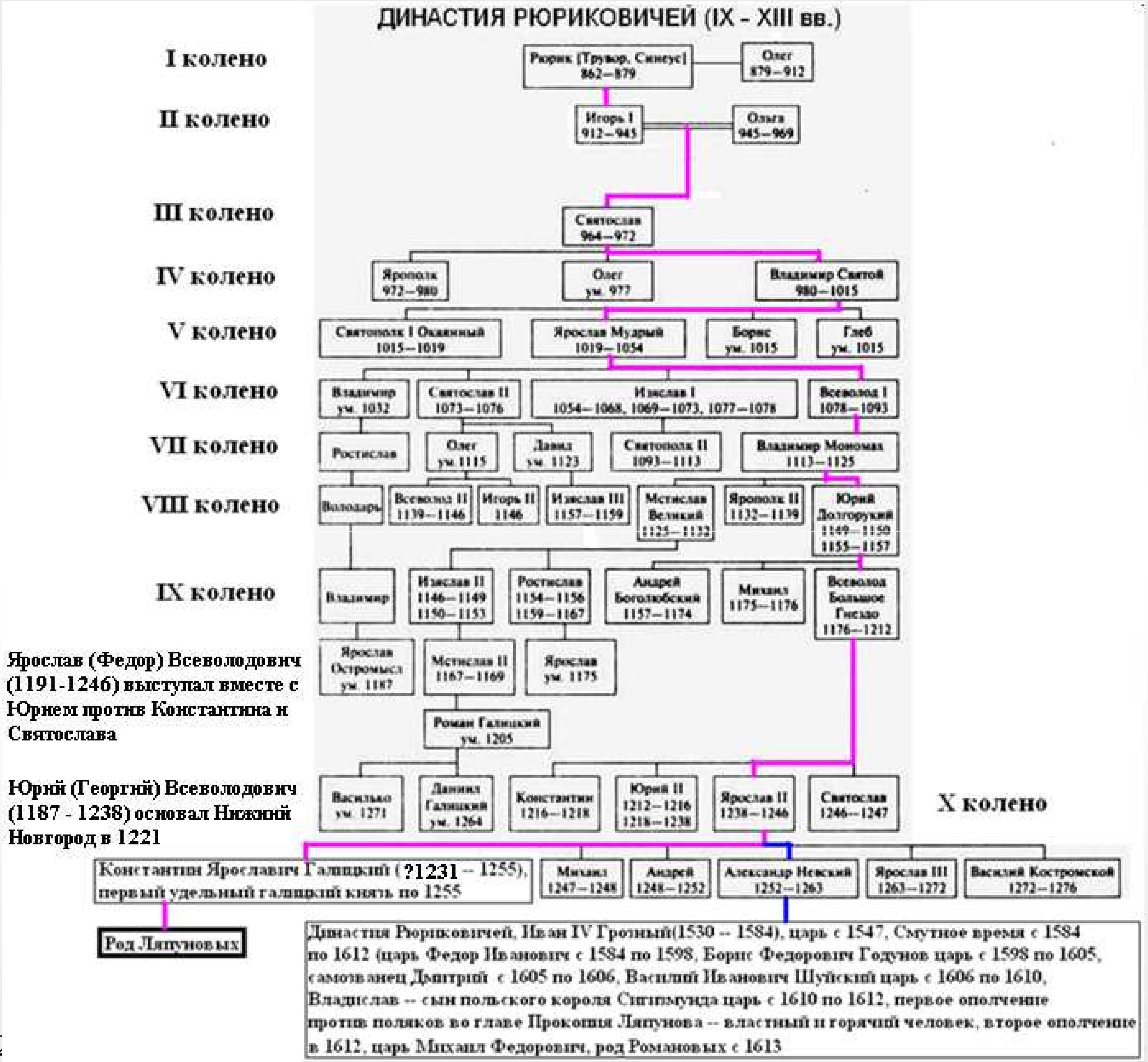
Тридцать шестое колено
Василий Александрович Ляпунов (1778–1847), с 1825 г. бухгалтер правления Казанского университета, в 1846 г. уволен по прошению

Тридцать седьмое колено
Виктор Васильевич Ляпунов (1817–1856), известный медик

Тридцать восьмое колено
Николай Викторович Ляпунов
(1850–1914),
инженер-мостостроитель

Тридцать девятое колено
Андрей Николаевич Ляпунов (1879–1923), геофизик

Сороковое колено
Алексей Андреевич Ляпунов (8.10.1911 – 23.06.1973), профессор МГУ (1952–1962), с 1962 г. работает в Сибирском отделении АН СССР, член-корреспондент АН СССР (1964). Математик, специалист в области теории функций и математических вопросов кибернетики. Одним из первых ученых оценил значение кибернетики и внес большой вклад в организацию работ по кибернетике в СССР, награжден орденом Ленина, Золотой медалью “Computer Pioneer” и другими медалями.


ДИНАСТИЯ РЮРИКОВИЧЕЙ (IX - XIII вв.)
I колено
Рюрик [Трувор, Синеус] 862–879
Олег 879–912
II колено
Игорь I 912–945
Ольга 945–969
III колено
Святослав 964–972
IV колено
Ярополк 972–980
Олег ум. 977
Владимир Святой 980–1015
V колено
Святополк I Окаянный 1015–1019
Ярослав Мудрый 1019–1054
Борис ум. 1015
Глеб ум. 1015
VI колено
Владимир ум. 1032
Святослав II 1073–1076
Изяслав I 1054–1068, 1069–1073, 1077–1078
Всеволод I 1078–1093
VII колено
Ростислав
Олег ум. 1115
Давид ум. 1123
Святополк II 1093–1113
Владимир Мономах 1113–1125
VIII колено
Володарь
Всеволод II 1139–1146
Игорь II 1146
Изяслав III 1157–1159
Мстислав Великий 1125–1132
Ярополк II 1132–1139
Юрий Долгорукий 1149–1150 1155–1157
IX колено
Владимир
Изяслав II 1146–1149 1150–1153
Ростислав 1154–1156 1159–1167
Андрей Боголюбский 1157–1174
Михаил 1175–1176
Всеволод Большое Гнездо 1176–1212
Ярослав Осмомысл ум. 1187
Мстислав II 1167–1169
Ярослав ум. 1175
Роман Галицкий ум. 1205
Ярослав (Федор) Всеволодович (1191-1246) выступал вместе с Юрием против Константина и Святослава
Юрий (Георгий) Всеволодович (1187 - 1238) основал Нижний Новгород в 1221
Василько ум. 1271
Даниил Галицкий ум. 1264
Константин 1216–1218
Юрий II 1212–1216 1218–1238
Ярослав II 1238–1246
Святослав 1246–1247
X колено
Константин Ярославич Галицкий (?1231 -- 1255), первый удельный галицкий князь по 1255
Михаил 1247–1248
Андрей 1248–1252
Александр Невский 1252–1263
Ярослав III 1263–1272
Василий Костромской 1272–1276
Род Ляпуновых
Династия Рюриковичей, Иван IV Грозный(1530 -- 1584), царь с 1547, Смутное время с 1584 по 1612 (царь Федор Иванович с 1584 по 1598, Борис Федорович Годунов царь с 1598 по 1605, самозванец Дмитрий с 1605 по 1606, Василий Иванович Шуйский царь с 1606 по 1610, Владислав -- сын польского короля Сигизмунда царь с 1610 по 1612, первое ополчение против поляков во главе Прокопия Ляпунова -- властный и горячий человек, второе ополчение в 1612, царь Михаил Федорович, род Романовых с 1613

Тридцать шестое колено от Рюрика

Василий Александрович Ляпунов (1778–1847), с 1825 по 1846 г. бухгалтер правления Казанского университета

Виктор Васильевич Ляпунов (1817–1856), известный медик

Михаил (1820–1868) директор обсерватории Казанского университета

Екатерина Сеченова (Ляпунова) (1834–1912)

Наталья Зайцева (Ляпунова) (1819–1897)

Николай Викторович Ляпунов (1850–1914), инженер-мостостроитель

Софья Крылова (Ляпунова) (1842–1913), муж Николай Александрович Крылов (1830–?), боевой офицер, участник англо-франко-русской войны 1855–1856 гг., писатель

Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918), создатель теории устойчивости

Наталья Ляпунова (Сеченова) (?–918)

Александр Михайлович Зайцев (1841–1910), химик-органик, ученик А.М. Бутлерова

Андрей (1879–1923), геофизик, жена Елена Васильевна Ляпунова (1887–1976))

Алексей Николаевич Крылов (1863–1945), математик, механик и кораблестроитель

Иван Михайлович Сеченов (1829–1905), выдающийся русский физиолог и мыслитель, брат мужа Екатерины Сеченовой (Ляпуновой), специалиста по арабским языкам

Анна Алексеевна Капица (Крылова) (1903–1996), муж Петр Леонидович Капица (1894–1984), академик АН СССР, лауреат Нобелевской премии по физике (1978)

Алексей Андреевич Ляпунов (1911–1973), специалист в области теории функций и основатель кибернетики

Елена Алексеевна (1936), цитогенетик

Наталья Алексеевна (1937), биолог

Сергей Петрович Капица (1928), физик

Род Филатовых впервые упоминается в 1587 (писцовая книга, Тула)
Михаил Федорович Филатов (1768–1861) , помещик

Мария Михайловна Филатова (1804–?), жена Александра Алексеевича Крылова (1785–1840), который награжден золотым оружием за храбрость и орденами за боевые заслуги в Отечественной войне

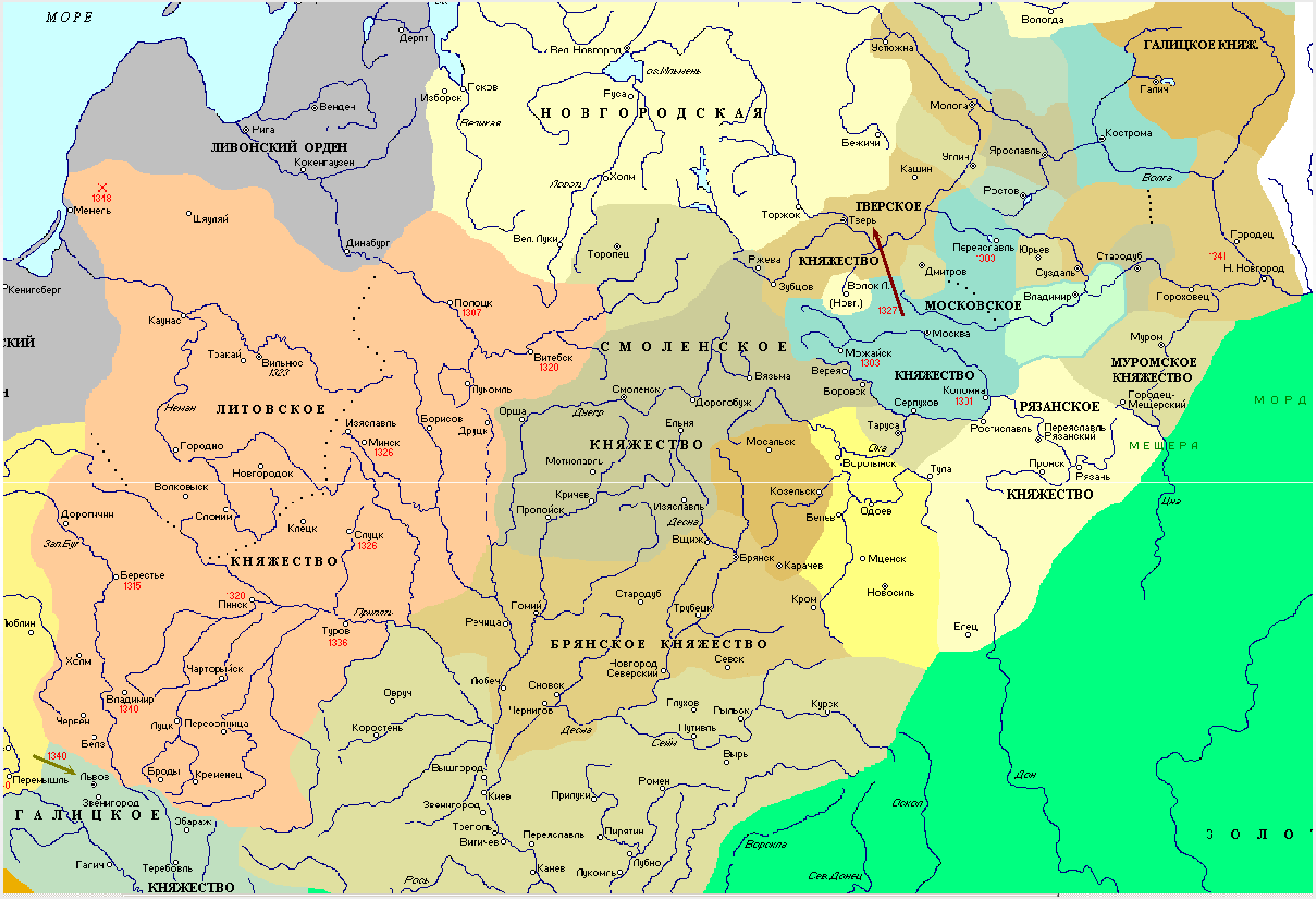
Николай Александрович Крылов (1830–?), боевой офицер, участник англо-франко-русской войны с 1855 по 1856 г., писатель, жена Софья Викторовна Ляпунова

Алексей Николаевич Крылов (1863–1945), математик, механик и кораблестроитель, академик (1916), Герой Социалистического Труда (1943)

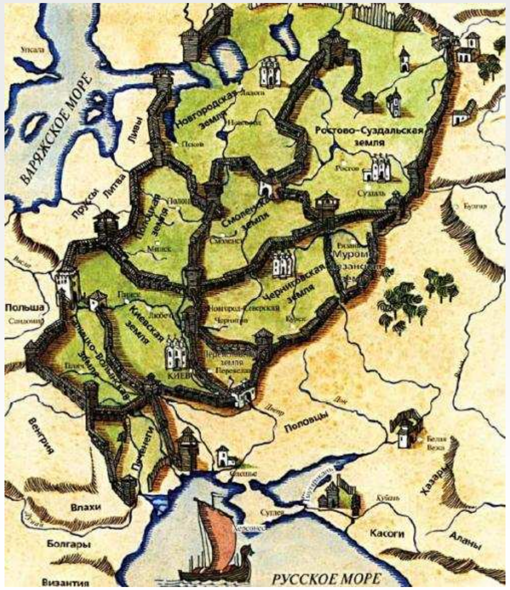
Федор Михайлович Филатов (1813–?), ротмистр гвардейского пехотного полка

Петр Федорович Филатов (1848–?), хирург и офтальмолог

Владимир Петрович Филатов (1875–1956), советский офтальмолог и хирург, академик АМН СССР (1944), Герой Социалистического Труда (1950)


НОВГОРОДСКАЯ
ЛИВОНСКИЙ ОРДЕН
ЛИТОВСКОЕ КНЯЖЕСТВО
СМОЛЕНСКОЕ КНЯЖЕСТВО
ТВЕРСКОЕ КНЯЖЕСТВО
МОСКОВСКОЕ
КНЯЖЕСТВО
ГАЛИЦКОЕ КНЯЖ.
МУРОМСКОЕ КНЯЖЕСТВО
РЯЗАНСКОЕ КНЯЖЕСТВО
БРЯНСКОЕ КНЯЖЕСТВО
ГАЛИЦКОЕ КНЯЖЕСТВО
МОРЕ
МОРДА
МЕЩЕРА
ЗОЛО

Рюрик ((? – 879)



Карта Руси (862)

Олег (? – 912)

Игорь (? – 945)

Святослав (942 – 972)

Владимир (948 – 1015), Святой и Равноапостольный

Ярослав Мудрый. Реконструкция М.М. Герасимова по подлинному черепу князя

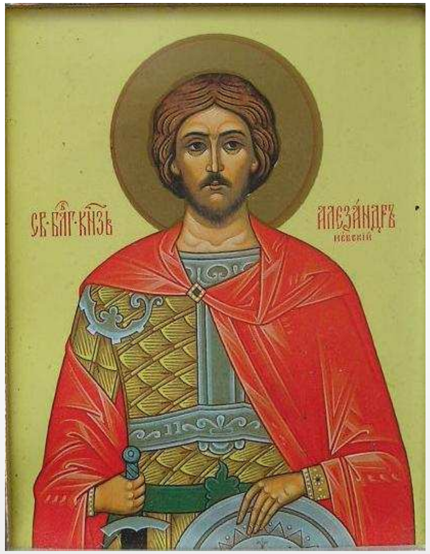
Ярослав (978 – 1054 г.)

Всеволод (1030—1093)

Владимир Мономах (1053—1125)

Юрий Долгорукий (1090 — 15. 5. 1157)

Всеволод Большое Гнездо (1154 — 1212)



Ярослав Всеволодович (1191 — 1246)

Александр Невский (? 1220 – 1263), скончался в Городце

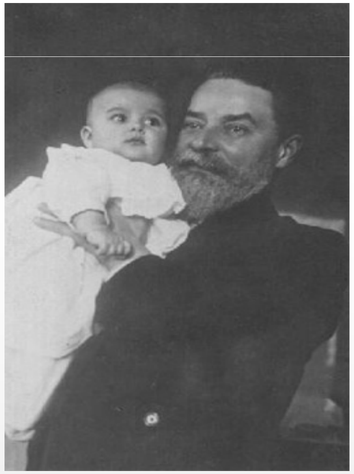
Александр

Ярослав III

Василий

Константин Ярославич Галицкий (1227?–1255)

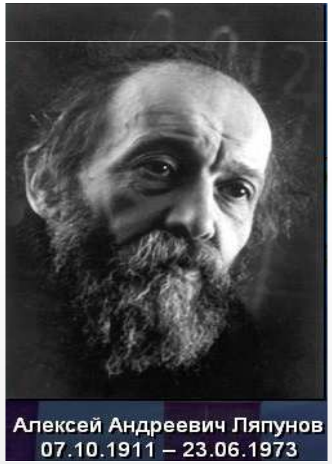
Прокопий Петрович Ляпунов (?–1611)



Николай Викторович Ляпунов (1850–1914)

Елена Васильевна Ляпунова (1887 – 1976)

Андрей Николаевич Ляпунов (1879–1923)



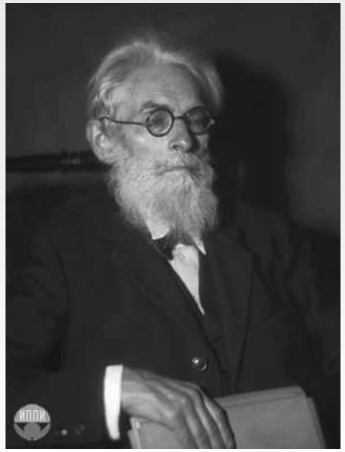
Алексей Андреевич Ляпунов (1911–973)

Константин Ярославич Галицкий (1231?–1255)

Прокопий Петрович Ляпунов (?–1611)

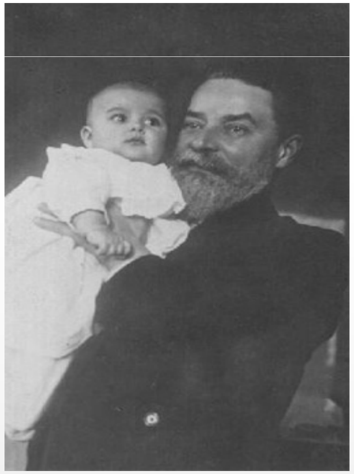
Михаил Васильевич (1820 –1868), астроном

Сергей Михайлович (1859–1924), композитор



Борис Михайлович (1862–1943), филолог

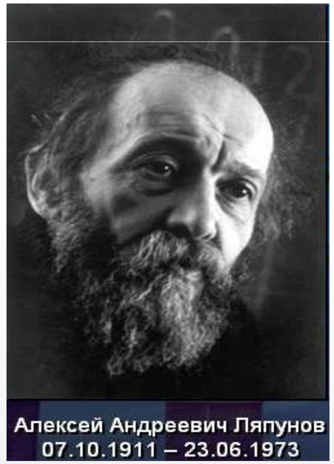
Сергей Семёнович Намёткин, химик



Николай Викторович Ляпунов (1850–1914)

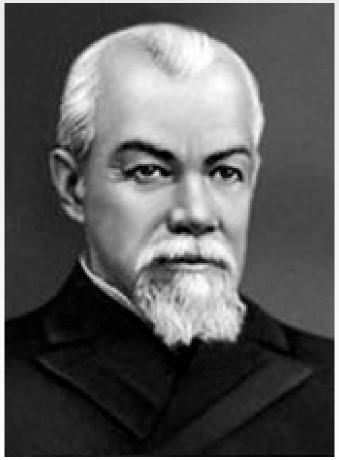
Елена Васильевна Ляпунова (1887–1976)

Андрей Николаевич Ляпунов (1879–1923)



Алексей Андреевич Ляпунов (1911–973)

Иван Михайлович Сеченов (1829–1905)



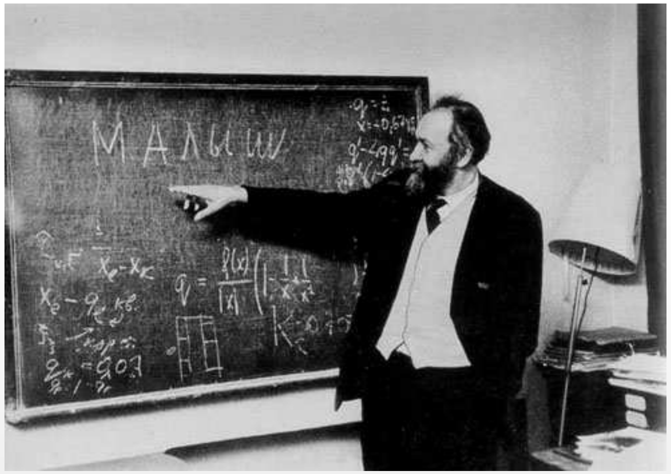
Александр Михайлович Зайцев (1841–1910)

Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918)

Алексей Николаевич Крылов (1863–1945)

Владимир Петрович Филатов (1875–1956)

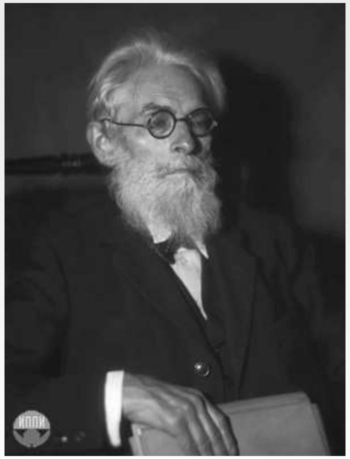
Пётр Леонидович Капица (1894–1984)



Алексей Андреевич Ляпунов (1911–1973)

Михаил Васильевич Ляпунов (1820–1868), астроном

Сергей Михайлович Ляпунов (1859–1924), композитор, дирижер



Борис Михайлович Ляпунов (1862–1943), академик, филолог

II. Классические модели случайных экспериментов с управлением

1) Колмогоровская модель с позиции «черного ящика» с использованием поточечного задания входа — выхода

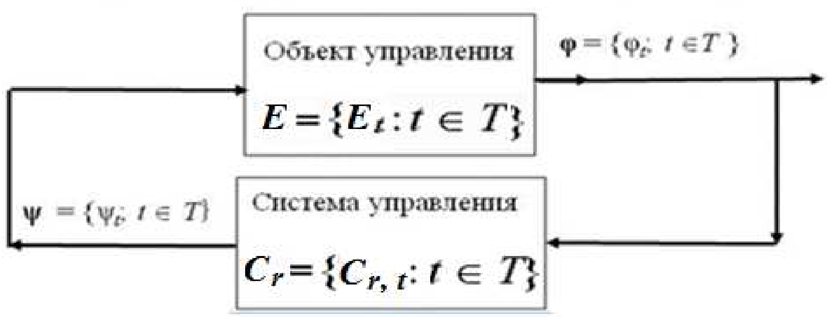
T — множество моментов времени t; $\mathcal{R}$ — множество управлений r;

$E = \{E_t : t \in T\}$ — семейство экспериментов (объект управления);

$C_r = \{C_{r,t} : t \in T\}$ — семейство экспериментов (система управления), $r \in \mathcal{R}$;

$W_r = \{(E_t, C_{r,t}) : t \in T\}$ — **случайный эксперимент с управлением** $r \in \mathcal{R}$;

Эксперимент с управлением с позиции « чёрного ящика»



$$(\mathfrak{I}^{эл}, \mathfrak{I}^{наб}, \mathrm{P}_r^*(A, N)) \leftrightarrow (\Omega, \mathfrak{I}, \mathrm{P}_r(A)), \quad A \in \mathfrak{I}^{наб}, \quad A \in \mathfrak{I}$$

$(Z, \mathcal{B})$ — фазовое пространство состояний объекта управления E;

$(Y, \mathcal{L})$ — фазовое пространство состояний системы управления C_r;

$\varphi_t(\omega)\colon \Omega \to Z$ случайная величина (элемент) со значениями в Z;

$\psi_t(\omega)\colon \Omega \to Y$ — случайная величина (элемент) со значением в Y;

$\varphi(\omega) = \{\varphi_t(\omega)\colon t \in T\} = z = \{z_t\colon t \in T\} \in Z^T$ — выход объекта управления;

$\psi(\omega) = \{\psi_t(\omega)\colon t \in T\} = y = \{y_t\colon t \in T\} \in Y^T$ — выход системы управления;

$(\varphi, \psi) = \{(\varphi_t, \psi_t)\colon t \in T\}$ — управляемый случайный процесс;

$\Phi(z, y)\colon Z^T \times Y^T \to R$ — затраты системы C_r от управления объектом E;

$\Phi(z, y)$ — $(\mathcal{B}^T \times \mathcal{L}^T / \mathcal{B}_0)$ — измеримый функционал;

$M_r\Phi(\varphi, \psi) = \int_\Omega \Phi(\varphi, \psi)\, dP_r(\cdot)$ — среднее значение затрат;

$M_{r'}\Phi(\varphi, \psi) = \inf\{M_r\Phi(\varphi, \psi)\colon r \in \mathcal{R}\}$ — условие оптимальности

2) Модель с использованием условных распределений входа — выхода и выборочных пространств (И.И. Гихман, А.В. Скороход, Е.В. Дынкин)

$T = \{0, 1, \ldots\}$ — время дискретное

Задают: $P_r(\{\omega: \varphi_0 \in B\}) = p(B)$, $B \in \mathcal{B}$ — начальное распределение

$P_r(\{\omega: \varphi_{t+1} \in B\} | \varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1, \ldots, \varphi_t, \psi_t) = p(B; z_0, z_1, \ldots, z_t; y_0, y_1, \ldots, y_t)$,

$B \in \mathcal{B}$, $z_t \in Z$, $y_t \in Y$, $t = 0, 1, \ldots$

$P_r(\{\omega: \psi_0 \in L\} | \varphi_0) = q_r(L, z_0)$, $L \in \mathcal{L}, z_0 \in Z$

$P_r(\{\omega: \psi_{t+1} \in L\} | \varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1, \ldots, \varphi_t, \psi_t, \varphi_{t+1}) =$

$= q_r(L; z_0, z_1, \ldots, z_{t+1}; y_0, y_1, \ldots, y_t)$, $L \in \mathcal{L}$, $z_t \in Z$, $y_t \in Y$, $t = 0, 1, \ldots$

Определяют:

$(Z^T, \mathcal{B}^T, p(\cdot | \mathrm{y}))$, $\mathrm{y} \in Y^T$ — выборочные вероятностные пространства для $\boldsymbol{E}$;

$(Y^T, \mathcal{L}^T, q_r(\cdot | \mathrm{z}))$, $\mathrm{z} \in Z^T$ — выборочные вероятностные пространства для $\boldsymbol{C_r}$;

$((Z \times Y)^T, (\mathcal{B} \times \mathcal{L})^T, u_r(\cdot))$ — выборочные вероятностные пространства для $\boldsymbol{W_r}$;

Вместо $\{(\varphi_t, \psi_t): t \in T\}$ на $(\Omega, \mathfrak{I}, P_r(\cdot))$ рассматривают $\{(\varphi'_t, \psi'_t): t \in T\}$ на

$((Z \times Y)^T, (\mathcal{B} \times \mathcal{L})^T, u_r(\cdot))$, где $\varphi'_t(\mathrm{z}) = z_t$, $\psi'_t(\mathrm{y}) = y_t$ при $t = 0, 1, \ldots$

$$M_r \Phi(\varphi, \psi) = \int_\Omega \Phi(\varphi, \psi)\, dP_r(\cdot) = M_r \Phi(\mathrm{z}, \mathrm{y}) = \int_{(Z \times Y)^T} \Phi(\mathrm{z}, \mathrm{y})\, du_r(\cdot)$$

Пример*: *Управляемые однородные цепи Маркова с доходами

3) Модель с позиции разбиения управляющей системы на элементы *с использованием 1) или 2) (Н.П. Бусленко)*

Сеть управляемых перекрестков

III. Кибернетический подход с позиции выделения общих свойств случайных экспериментов с управлением (А.А. Ляпунов, С.В. Яблонский, М.А. Федоткин)

1) Фундаментальные положения

- принцип дискретности актов функционирования эксперимента W_γ во времени τ_i, $i \geq 0$;
- любой эксперимента W_γ обладает схемой, информацией, координатами и функцией;
- Схема включает следующие блоки: внешнюю среду, входные полюсы, внешнюю память, устройство по переработке информации внешней памяти, внутреннюю память, устройство по переработке информации внутренней памяти, выходные полюсы

Схема случайного эксперимента с управлением

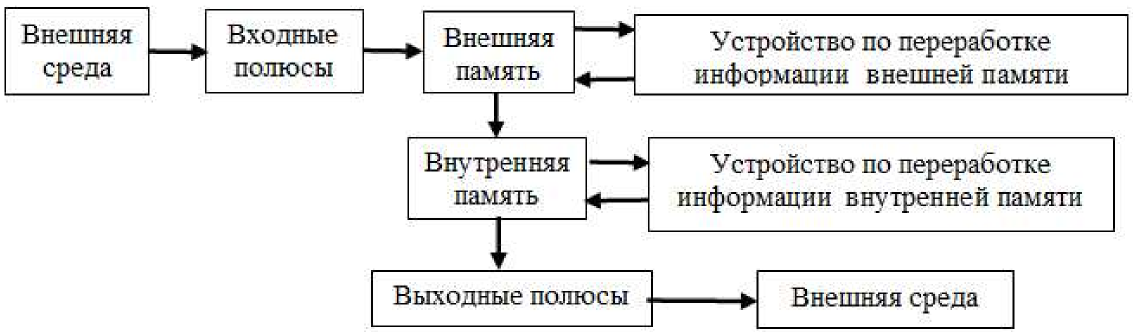


Схема отражает скелетное строение системы, прямые функциональные связи между блоками и даёт возможность её графического изображения

Информация — набор состояний всех блоков элементов схемы

Координаты — номера (метки) состояний каждого блока схемы, которые позволяют идентифицировать эксперимент во времени $\boldsymbol{\tau}_i$, $i \geq 0$

Функция — действие и цель проведения эксперимента

2) Этапы построения модели

- Выделение схемы, информации, координат и функции
- Выбор шкалы тактов функционирования системы во времени $\boldsymbol{\tau}_i$, $i \geq 0$
- Нелокальное описание блоков схемы (кодирование информации)
- Выявление прямых функционально-статистических связей между блоками схемы
- Конструктивное построение и изучение соответствующего управляемого случайного процесса $\{(\varphi^+_t,\ \psi^+_t):\ t \in T\}$ — математической модели основных характеристик эксперимента с управлением W_r

IV. *Задача Мостеллера* [4, 5]

Чтобы подбодрить сына, делающего успехи в игре в теннис, отец обещает ему приз, *если сын выиграет подряд, по крайней мере, две теннисные партии против своего отца и клубного чемпиона.* Чемпион играет лучше отца. Сын выигрывает у чемпиона с вероятностью p и у отца — с вероятностью $q > p$. Предполагается, что выигрыши сына независимы в совокупности. Сын имеет право выбрать один из двух вариантов очерёдности игры:

1) чемпион затем отец и снова чемпион (Ч $\rightarrow$ О $\rightarrow$ Ч);

2) отец затем чемпион и снова отец (О $\rightarrow$ Ч $\rightarrow$ О).

Какой из двух вариантов поведения следует выбрать сыну с точки зрения наиболее вероятного получения приза?

Задача об экзаменах и её решение с позиции модели «черного ящика» [1, 2]

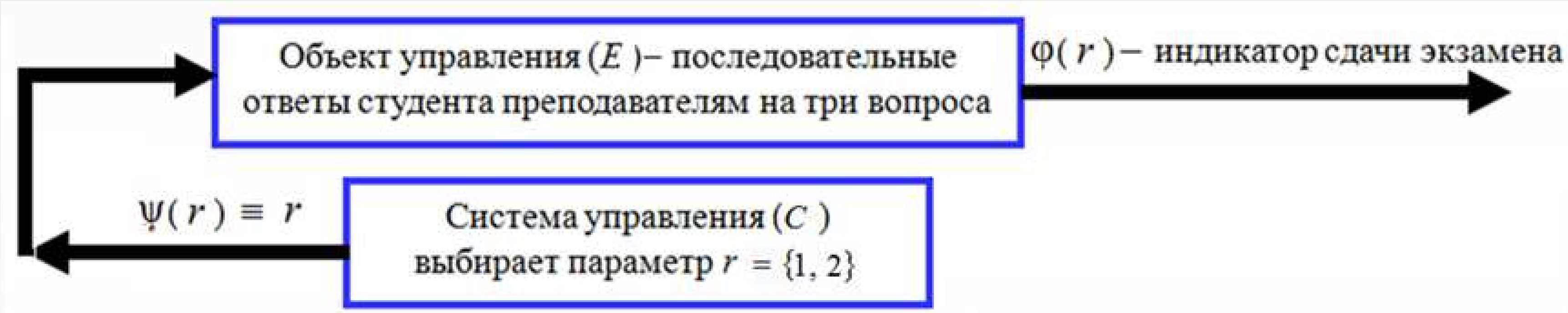
Студенты сдают экзамен, каждый из которых должен обязательно ответить по билету только на три вопроса раздельно профессору и ассистенту. Известно, что вопросы первый и третий являются теоретическими, а второй заключается в решении практической задачи. ***Студент сдаёт экзамен, если он , по крайней мере, два раза подряд положительно отвечает на вопросы.*** Профессору он отвечает положительно на любой вопрос с вероятностью p и ассистенту — с вероятностью q При этом естественно предположить, что $p < q$.

Студенту предлагается выбрать один из двух вариантов поведения.

1) Первый вариант заключается в том, что сначала студент отвечает профессору, затем — ассистенту и снова — профессору (**пр → ас → пр**).

2) При втором варианте на первый вопрос он отвечает ассистенту, на второй вопрос — профессору, и на последний вопрос — ассистенту (**ас → пр → ас**).

Рассмотрим неформальное решение этой удивительной и поучительной задачи, которое было предложено Мостелером и Секеем с позиции «черного ящика».



Пусть события A_1, A_2 и A_3 означают, что на первый вопрос студент положительно ответил профессору, на второй вопрос — ассистенту и на третий вопрос — опять профессору. Событие A — студент сдаст экзамен при первом варианте его поведения. Пусть события B_1, B_2 и B_3 заключаются в том, что на первый вопрос студент положительно ответил ассистенту, на второй вопрос — профессору и на третий вопрос — снова ассистенту. Событие B — студент сдаст экзамен при втором варианте поведения. Тогда $\boldsymbol{A = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cap A_3)}$, $\boldsymbol{B = (B_1 \cap B_2) \cup (B_2 \cap B_3)}$, $\mathbf{P}(A) = pq + qp - pqp$, $\mathbf{P}(B) = qp + pq - qpq$. Отсюда $\mathbf{P}(A) > \mathbf{P}(B)$ при $q > p$.

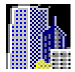
$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = 4pg - pq(p + q) = 1{,}47$ при $p = 75\%$, $q = 80\%$.

V. Построение, анализ и оптимизация моделей реальных эволюционных систем с использованием кибернетического подхода [1, 2, 3]:

1. **Системы управления транспортом на пересечении магистралей;**
   (*Анисимова, Голышева, Журова, Княжицкий, Кувыкина, Куделин, Литвак, Неймарк, Преображенская, Пройдакова, Троилова, Федоткин, Черток*)
2. **Системы адаптивных роботов по управлению производством микросхем на кристаллах;**
   (*Ваганов, Гуляев, Славинский, Федоткин*)
3. **Системы управления процессом взлета, прохождения воздушных конфликтных коридоров и посадки самолетов в крупных аэропортах;**
   (*Кувыкина, Федоткин*)
4. **Информационно-вычислительные сети;**
   (*Высоцкий, Зорин, Федоткин*)
5. **Системы управления процессом авторизации;**
   (*Анисимова, Верниковский, Федоткин*)
6. **Системы организации работы таможен в крупных аэропортах;**
   (*Федоткин*)
7. **Процессы страхования.**
   (*Зорин, Мухин, Федоткин*)

Управляемый перекресток

Имитация управления транспортом на перекрёстке по адаптивному алгоритму



Application

КОЛЬЦЕВАЯ ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЬ НА ПЛОЩАДИ ЛЯДОВА (НИЖНИЙ НОВГОРОД)

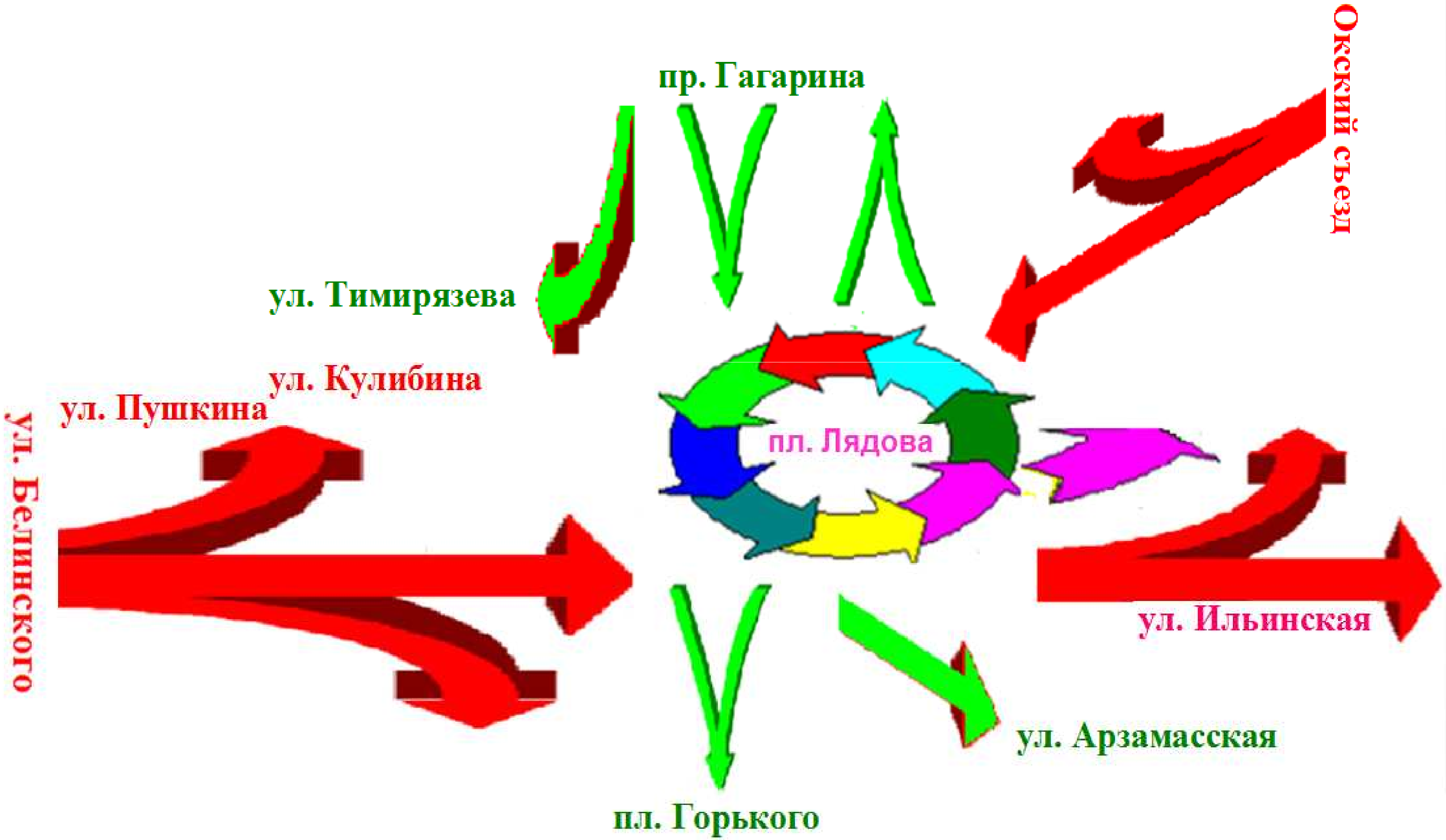
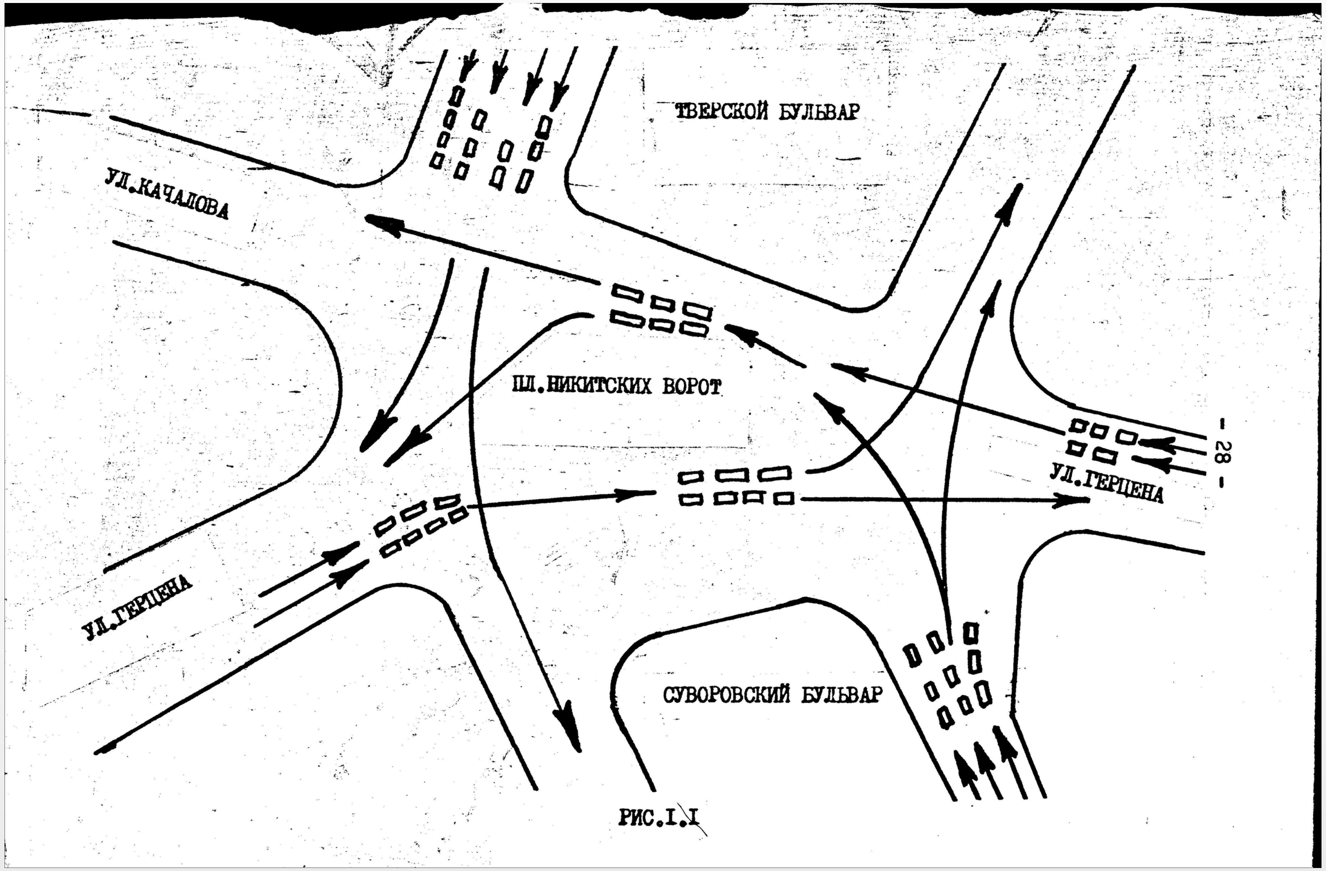


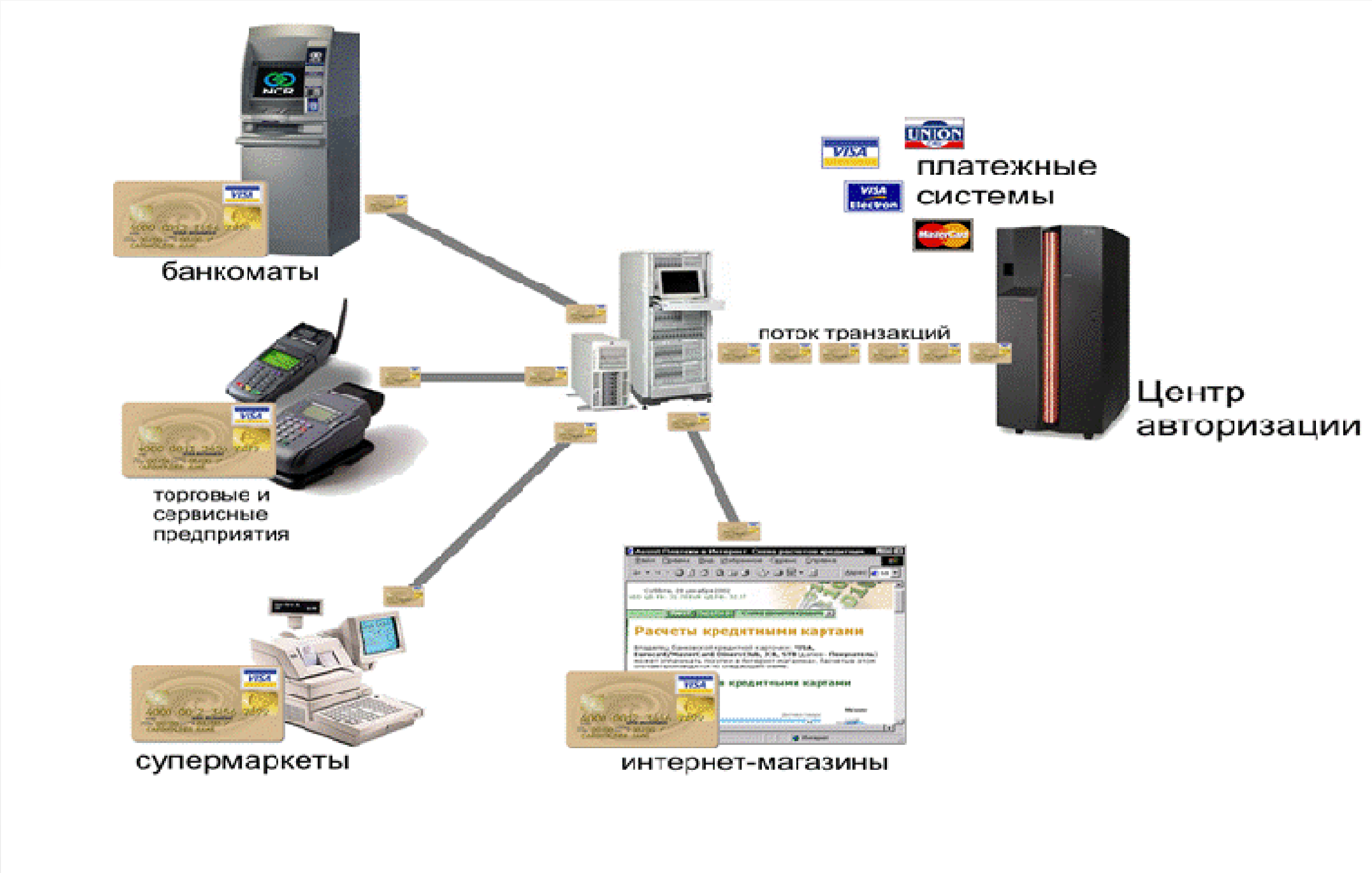
Схема транспортного движения на площади Никитских ворот (г. Москва)



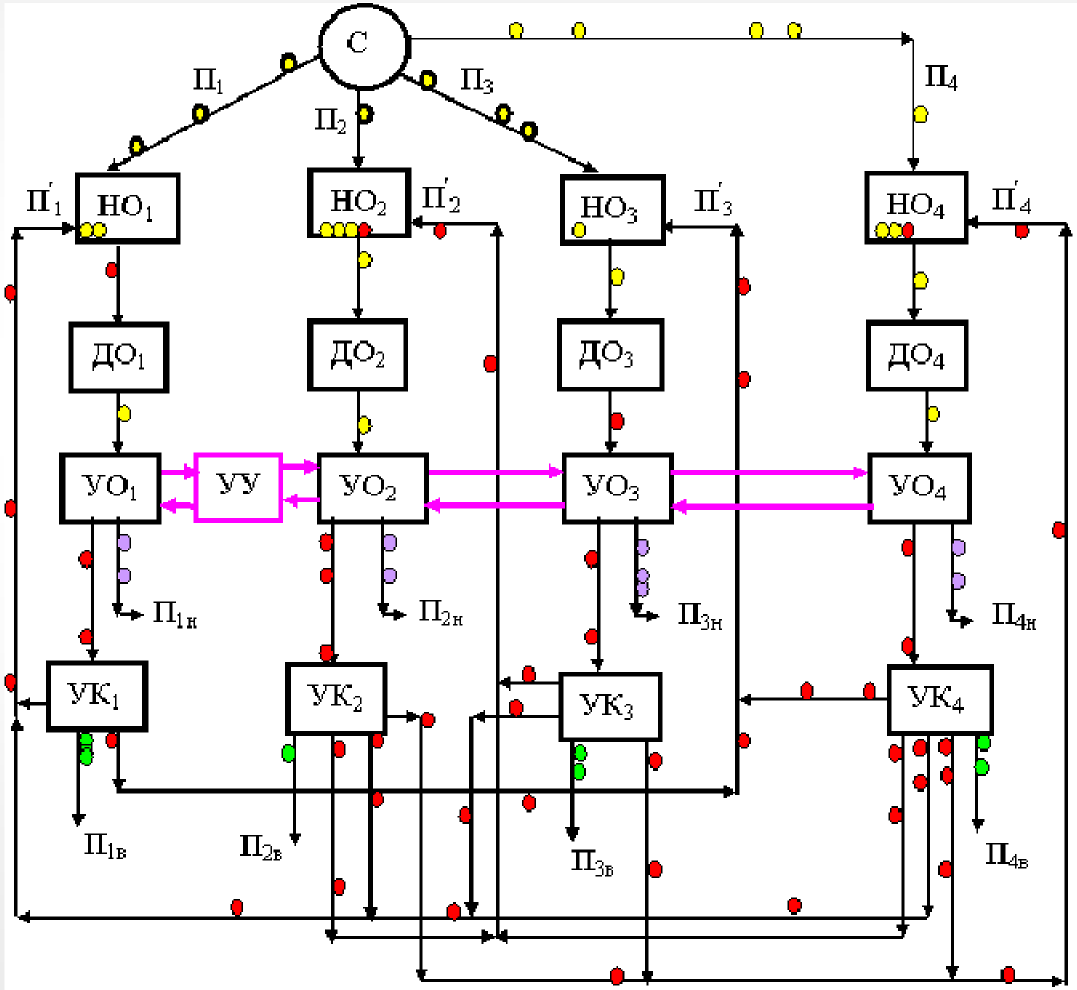
Микросварочный сборочный цех производства микросхем на кристаллах

Системы адаптивных роботов по управлению производством микросхем на кристаллах

СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ АВТОРИЗАЦИИ ТРАНЗАКЦИЙ



Пример сети с 4 стойками досмотра (наркотики, валюта, терроризм, оружие) и одним узлом управления при прохождении пассажиров через таможню в аэропорту



С — случайная среда,

$П_j$ — входной поток,

$П'_j$ — поток вторичных,

$НО_j$ — накопитель,

$ДО_j$ — дисциплина очереди,

$УО_j$ — узел обслуживания,

$П_{jв}$ — выходной поток,

$П_{jн}$ — поток насыщения,

$УК_j$ — узел коммутации,

УУ — узел управления

Решение парадокса Мостеллера—Секея

Эксперимент W_r:

a) каждый студент сдаёт экзамен, если он, по крайней мере, два раза подряд положительно ответит на три последовательных вопроса $в_1$, $в_2$, $в_3$;

b) либо студент отвечает по плану: профессор → ассистент → профессору (b_1) с вероятностью $r \in [0, 1]$, либо он отвечает по плану: ассистент → профессор → ассистент (b_2) с вероятностью $1 - r$;

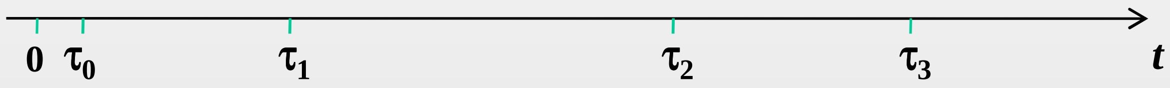
c) профессору студент отвечает на вопрос положительно с *априорной* вероятностью p и ассистенту — с *априорной* вероятностью $q > p$.

Определить оптимальный план с точки зрения сдачи экзамена студентом.

Построение модели:

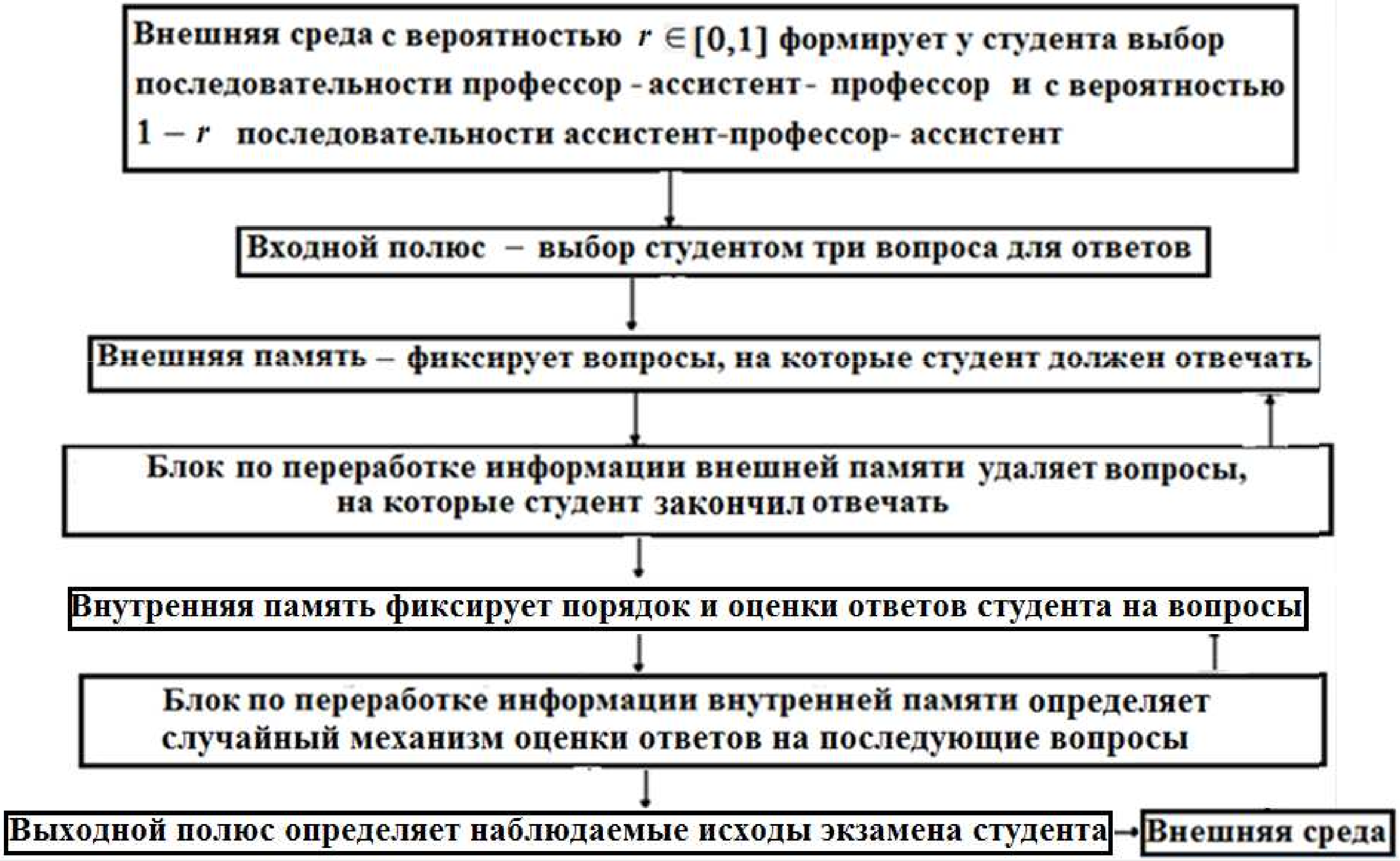
— Выбор шкалы тактов времени функционирования эволюционной системы

Эксперимент W_r наблюдается и изучается в случайные моменты τ_0, τ_1, τ_2 и τ_3, где τ_0 — момент случайного выбора плана b_1 с вероятностью $r \in [0, 1]$ или плана b_2 с вероятностью $1 - r$ и получения трёх последовательных вопросов $в_1$, $в_2$, $в_3$;
τ_i — момент завершения ответа на вопрос с номером $i = 1, 2, 3$.



— Выделение схемы

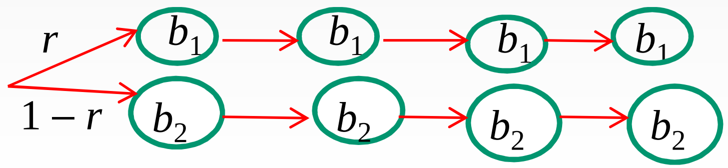
Схема задачи Мостеллера об экзаменах



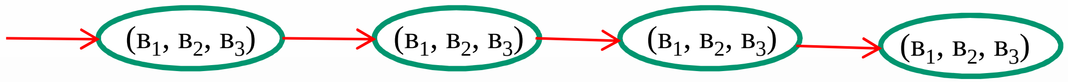
— Выделение информации, состояний, координат и функции в задаче Мостеллера

1. Информация внешней среды — множество {профессор → ассистент → профессор, ассистент → профессор → ассистент} = $\{b_1, b_2\}$ из двух состояний b_1 и b_2 внешней среды.
Координаты внешней среды — номера 1, 2 её состояний b_1 и b_2.
Состояние внешней среды в момент τ_i есть случайный элемент $\chi_i \equiv \chi_0$ при $i = 0, 1, 2, 3$.
Код информации внешней среды — случайный вектор $(\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3)$.

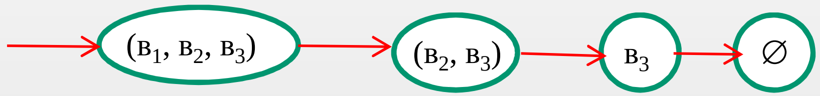
$\mathbf{P}(\chi_0 = b_1) = r$,
$\mathbf{P}(\chi_0 = b_2) = 1 - r$



2. Информация входного полюса — множество $\{(в_1, в_2, в_3)\}$ из состояния $(в_1, в_2, в_3)$.
Состояние входного полюса в момент τ_i есть вектор $\alpha_i \equiv (в_1, в_2, в_3)$ при $i = 0, 1, 2, 3$.
Код информации этого полюса — вектор $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ с равными компонентами.



3. Информация внешней памяти — множество$\{(в_1, в_2, в_3), (в_2, в_3), в_3, \varnothing\}$ из четырёх состояний $d_1 = (в_1, в_2, в_3)$, $d_2 = (в_2, в_3)$, $d_3 = в_3$ и $d_4 = \varnothing$ внешней памяти.
Координаты внешней памяти — номера 1, 2, 3 и 4 её состояний d_1, d_2, d_3 и d_4.
Состояние внешней памяти в момент τ_i есть $\beta_i = d_{i+1}$ при $i = 0, 1, 2, 3$.
Код информации внешней памяти — вектор $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$.



4. Информация блока по переработке внешней памяти — множество $\{\varnothing, в_1, (в_1, в_2), (в_1, в_2, в_3)\}$ из четырёх состояний $e_1 = \varnothing$, $e_2 = в_1$, $e_3 = (в_1, в_2)$ и $e_4 = (в_1, в_2, в_3)$ этого блока.

Координаты блока по переработке внешней памяти — номера 1, 2, 3 и 4 состояний e_1, e_2, e_3 и e_4 этого блока.

Состояние блока по переработке внешней памяти в момент τ_i есть $\zeta_i = e_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Код информации блока по переработке внешней памяти — вектор $(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$.

$$\to \varnothing \to в_1 \to (в_1, в_2) \to (в_1, в_2, в_3)$$

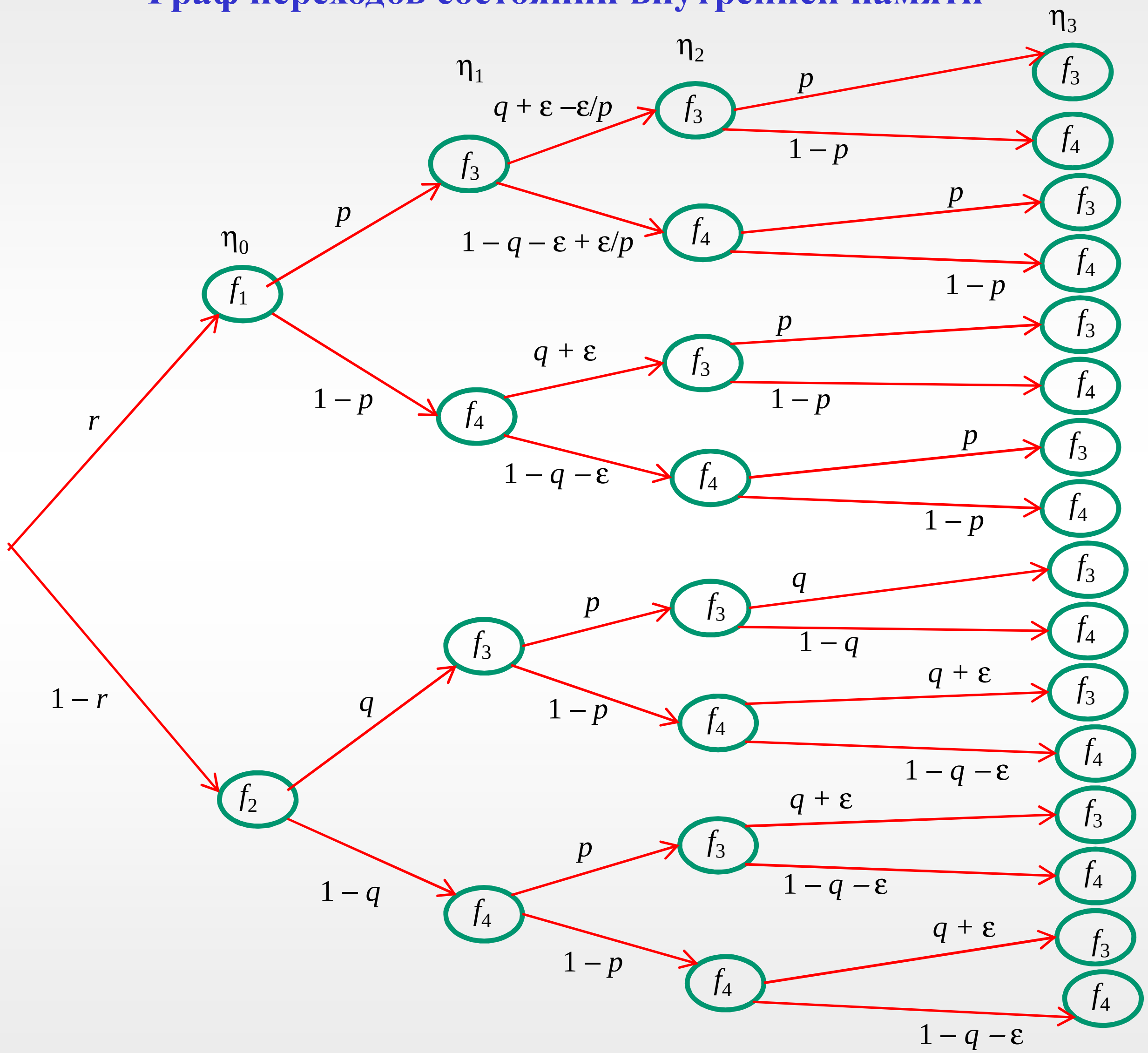
5. Информация блока внутренней памяти — множество {студент выбрал первую схему ответа (f_1), студент выбрал вторую схему ответа (f_2), студент ответил на вопрос (f_3), студент не ответил на вопрос (f_4)} из четырёх состояний вида f_1, f_2, f_3, f_4.

Координаты внутренней памяти — номера 1, 2, 3 и 4 состояний f_1, f_2, f_3 и f_4.

Состояние внутренней памяти в момент τ_i есть случайный элемент η_i при $i = 0, 1, 2, 3$. Здесь $\eta_0 \in \{f_1, f_2\}$, $\eta_1 \in \{f_3, f_4\}$, $\eta_2 \in \{f_3, f_4\}$, $\eta_3 \in \{f_3, f_4\}$.

Код информации внутренней памяти — случайный вектор $(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$.

Граф переходов состояний внутренней памяти



6. Информация блока по переработке внутренней памяти — множество $\{r, (p, q), (q + \varepsilon - \varepsilon/p\ , q + \varepsilon, p, p), (p, p, p, p, q, q + \varepsilon, q + \varepsilon, q + \varepsilon)\}$ из четырёх векторных состояний вида: $g_1 = r$, $g_2 = (p, q)$, $g_3 = (q + \varepsilon - \varepsilon/p, q + \varepsilon, p, p)$, $g_4 = (p, p, p, p, q, q + \varepsilon, q + \varepsilon, q + \varepsilon)$.

Координаты блока по переработке внутренней памяти — номера 1, 2, 3 и 4 состояний g_1, g_2, g_3 и g_4.

Состояние блока в момент τ_i есть $\theta_i = g_{i+1}$ при $i = 0, 1, 2, 3$.

Код информации блока — вектор $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

$$\to g_1 = r \to g_2 = (p, q) \to g_3 = (q + \varepsilon - \varepsilon/p, q + \varepsilon, p, p) \to g_4 = (p, p, p, p, q, q + \varepsilon, q + \varepsilon, q + \varepsilon)$$

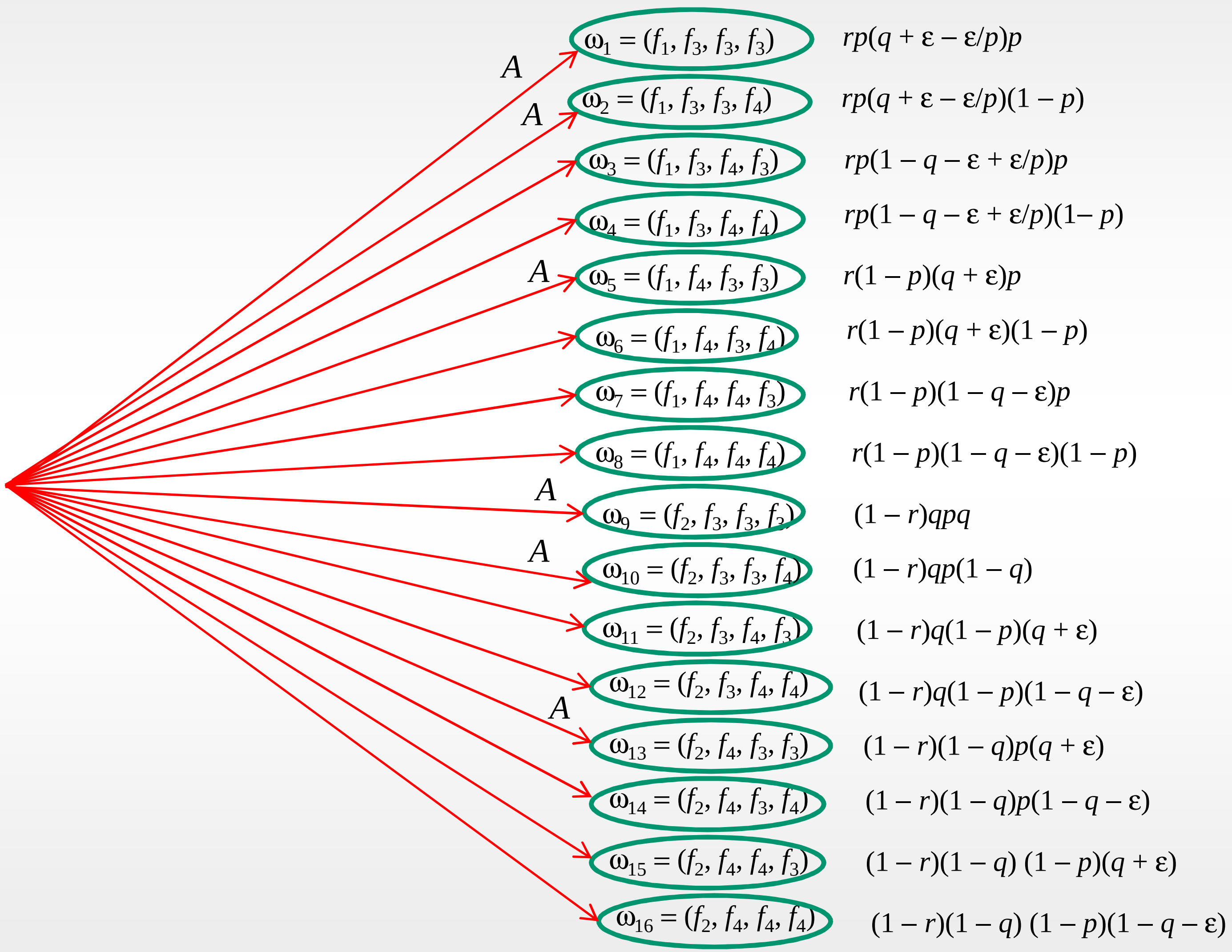
7. Информация блока выходного полюса — пространство $\Omega = \{\omega = (x_0, x_1, x_2, x_3)$: $x_0 \in \{f_1, f_2\}, x_1, x_2, x_3 \in \{f_3, f_4\}\}$ из 16 векторов (состояний). Элемент $\omega = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ из пространства Ω является значением (реализацией) случайного вектора $(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$ и объявляется описанием элементарного исхода эксперимента W_r. Пусть $\omega_1 = (f_1, f_3, f_3, f_3)$, $\omega_2 = (f_1, f_3, f_3, f_4)$, $\omega_3 = (f_1, f_3, f_4, f_3)$, $\omega_4 = (f_1, f_3, f_4, f_4)$, $\omega_5 = (f_1, f_4, f_3, f_3)$, $\omega_6 = (f_1, f_4, f_3, f_4)$, $\omega_7 = (f_1, f_4, f_4, f_3)$, $\omega_8 = (f_1, f_4, f_4, f_4)$, $\omega_9 = (f_2, f_3, f_3, f_3)$, $\omega_{10} = (f_2, f_3, f_3, f_4)$, $\omega_{11} = (f_2, f_3, f_4, f_3)$, $\omega_{12} = (f_2, f_3, f_4, f_4)$, $\omega_{13} = (f_2, f_4, f_3, f_3)$, $\omega_{14} = (f_2, f_4, f_3, f_4)$, $\omega_{15} = (f_2, f_4, f_4, f_3)$, $\omega_{16} = (f_2, f_4, f_4, f_4)$.

Координаты блока выходного полюса — номера 1, 2, …, 16 описаний $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{16}$ всех элементарных исходов $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_{16}\}$ эксперимента W_r.

Состояние блока в момент τ_i есть x_i, $i = 0, 1, 2, 3$.

Код информации блока выходного полюса — вектор $\omega = (x_0, x_1, x_2, x_3)$.

Граф появлений состояний выходного полюса



8. Функция эксперимента W_r — оценка знаний студента по его ответам на три последовательных вопроса.

— Выявление функционально-статистических связей между блоками схемы

1. Вероятностная модель выходного полюса — $(\Omega, \Im, \mathbf{P}_r(\bullet))$, где $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{16}\}$,

$$\Im = \{D: D \subset \Omega\} = \{D_1, D_2, \dots, D_{65536}\}, \mathbf{P}_r(\{\omega_1\}) = rp(q + \varepsilon - \varepsilon/p)p,$$

$$\mathbf{P}_r(\{\omega_2\}) = (1 - p)\, rp(q + \varepsilon - \varepsilon/p)p, \dots, \mathbf{P}_r(\{\omega_{16}\}) = (1 - r)(1 - q)\,(1 - p)(1 - q - \varepsilon).$$

2. Пусть $D_1 = A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_9, \omega_{10}\ \omega_{13}\}$ — студент сдал экзамен, то

$$\mathbf{P}_r(A) = r[pq(q - p) - \varepsilon(1 + p^2 - p - pq)] + qp(2 - q) + p\varepsilon(1 - q).$$

3. Функционально-статистическая связь между внешней средой и выходным полюсом

$$— \ \chi_0(\omega_1) = \chi_0(\omega_2) = \dots = \chi_0(\omega_8) = b_1, \chi_0(\omega_9) = \chi_0(\omega_{10}) = \dots = \chi_0(\omega_{16}) = b_2.$$

4. Функционально-статистическая связь между внутренней памятью и выходным полюсом, например, функционально-статистическая связь между выходным полюсом и внутренней памятью в моменты τ_2 и τ_3:

$\eta_2(\omega_s) = f_3$ при $s = 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14$; $\eta_3(\omega_s) = f_3$, при нечетном значении s;

$$\mathbf{P}_r(\eta_2 = f_3 | \eta_0 = f_1) = q, \quad \mathbf{P}_r(\eta_2 = f_3 | \eta_0 = f_1, \eta_1 = f_3) = q + \varepsilon - \varepsilon/p,$$

$$\mathbf{P}_r(\eta_2 = f_3 | \eta_0 = f_1, \eta_1 = f_4) = \mathbf{P}_r(\eta_3 = f_3 | \eta_0 = f_2, \eta_1 = f_4, \eta_2 = f_3) = q + \varepsilon.$$

— Определение оптимального поведения студента и решение парадокса Мостеллера—Секея

$0 < p,\ \ q < 1,\ \ p \le q$ — **ограничения на параметры p и q подготовки студента;**

$0 \le \varepsilon,\ \ q + \varepsilon < 1,\ \ p \le q + \varepsilon - \varepsilon/p$ — **ограничения на параметр ε обучения на экзамене;**

$$\max\{\mathbf{P}_r(A) = r[pq(q-p) - \varepsilon(1 + p^2 - p - pq)] + qp(2-q) + p\varepsilon(1-q):\ 0 \le r \le 1\} = \mathbf{P}_{r'}(A),$$

r' — оптимальная стратегия поведения.

1. Если $q \ge (p - 0{,}5)^2 + 0{,}75$, то $1 - q \le p(q-p)(1-p)^{-1} \le pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1}$.

Отсюда, $0 \le \varepsilon < 1 - q$ и $pq(q-p) - \varepsilon(1 + p^2 - p - pq) > 0$. Значит, оптимальный план $r' = 1$.

2. Если $q < (p - 0{,}5)^2 + 0{,}75$, то $pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1} < p(q-p)(1-p)^{-1} < 1 - q$.

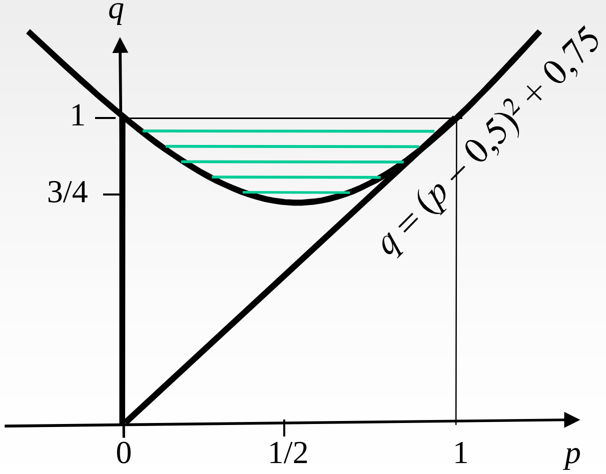
— Пусть $0 \le \varepsilon < pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1}$, то $pq(q-p) - \varepsilon(1 + p^2 - p - pq) > 0$ и $r' = 1$.

— Пусть $\varepsilon = pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1}$, то $pq(q-p) - \varepsilon(1 + p^2 - p - pq) = 0$ и $0 \le r' \le 1$.

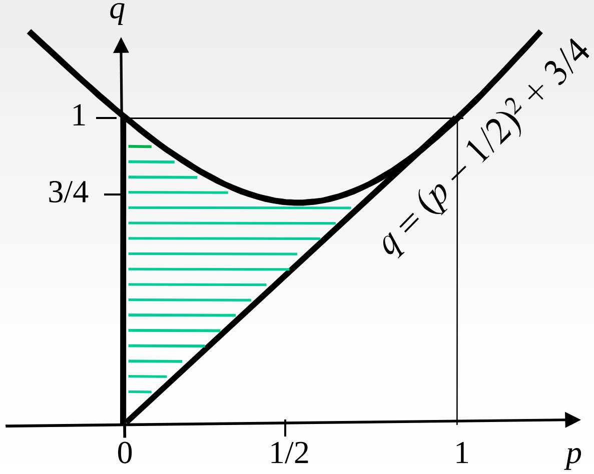
— Пусть $pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1} < \varepsilon \le p(q-p)(1-p)^{-1}$,

то $pq(q-p) - \varepsilon(1 + p^2 - p - pq) < 0$ и, следовательно, оптимальная стратегия $r' = 0$.

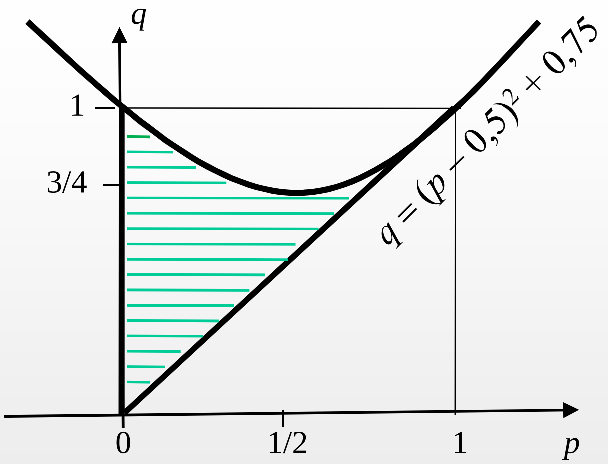
$q \geq (p-0{,}5)^2 + 0{,}75;\ 0 \leq \varepsilon < 1 - q;$ $\mathbf{r' = 1}$



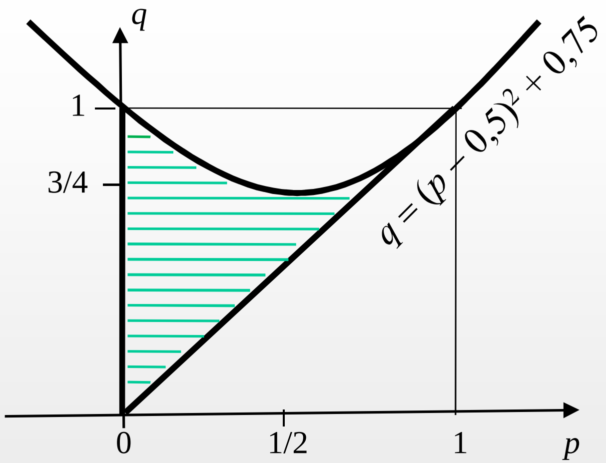
$q < (p-0{,}5)^2 + 0{,}75;\ 0 \leq \varepsilon < pq(q-p)(1+p^2-p-pq)^{-1};$ $\mathbf{r' = 1}$



$q < (p-0{,}5)^2 + 0{,}75;$
$\varepsilon = pq(q-p)(1+p^2-p-pq)^{-1};$ $\mathbf{0 \leq r' \leq 1}$



$q < (p-0{,}5)^2 + 0{,}75;\ pq(q-p)(1+p^2-p-pq)^{-1} <$
$< \varepsilon \leq p(q-p)(1-p)^{-1};$ $\mathbf{r' = 0}$



Список публикаций

1. Федоткин М.А. Процессы обслуживания и управляющие системы // Математические вопросы кибернетики.— М.: Наука • Физматлит. — 1996.— Вып.6.— С. 51—70.

2. Федоткин М.А. Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов // Математические вопросы кибернетики.— М.: Наука • Физматлит. — 1998.— Вып.7.— с. 333—345.

3. Ляпунов А.А., Яблонский С.В. Теоретические проблемы кибернетики // Проблемы кибернетики. — М.: Физматгиз. — 1963. — Вып. 9. — С. 5—22.

4. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. М.: Наука. 1985. 88 с.

5. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: Мир. 1990. 240 с.

6. Сизова Э.В. Очерки из истории Куркинского края. Тула. Левша. 2004. 364 с.

7. Ляпунова Н.А., Фет Я.И. Алексей Андреевич Ляпунов. Новосибирск. <<Гео>> ИВМиМГ СО РАН. 2001. 524 с.
8. Воронцов Н.Н. Алексей Андреевич Ляпунов. М.: Новый хронограф. 2011. 240 с.